LA

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

SANS LE POSTULATUM D'EUCLIDE

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége,*
2e série, t. XIX.)

Bruxelles. — Hayez, imp. de l'Acad. royale.

LA

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

SANS LE POSTULATUM D'EUCLIDE

PAR

J°. DELBŒUF

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BELGIQUE

Prix : 4 francs

PARIS
Librairie scientifique A. HERMANN
8, rue de la Sorbonne

LIÈGE
Charles DESOER, Éditeur
2bis, rue Gérardrie

1897

AVANT-PROPOS.

L'essai qui va suivre est la suite et le complément naturel de trois études sur l'*Ancienne et les Nouvelles géométries*, qui ont paru dans la *Revue philosophique* (tome XXXVI, nov. 1893 ; tome XXXVII, avril 1893 ; tome XXXVIII, août 1894) [1].

Dans la première, j'établissais que l'espace réel n'est pas représenté par l'espace euclidien; que celui-ci est homogène et admet des figures semblables, c'est-à-dire ne différant que par la grandeur; qu'il est partout identique à lui-même, invariable, fini, discontinu, pénétrable, contradictoire et, partant, sans existence ; tandis que l'espace réel ne comporte ni figures semblables ni figures égales, qu'il est nécessairement et incessamment variable, qu'il est illimité, continu, impénétrable et cohérent. Ces antithèses, je les légitimais en montrant l'impossibilité de réduire proportionnellement, sans qu'on s'en aperçoive, toutes les dimensions, par exemple de la Terre et de ses habitants; que, pour que semblable réduction passât inaperçue, il faudrait « poser en fait que les phénomènes de toute nature, physiques, vitaux et psychiques sont attachés uniquement à des figures géométriques, ce qui reviendrait à soutenir que des cubes, des cylindres et des pyramides, peuvent réagir les uns sur les autres, vivre et penser. Alors naturellement toute altération

[1] La *Revue* devait publier le présent travail et elle en avait fait paraître une partie en avril 1895. Le texte du reste a été composé en entier et les figures gravées. Mais dans la crainte — légitime sans doute — que le morceau ne fût trop dur à digérer pour ses lecteurs habituels, elle en reculait de mois en mois l'insertion. J'ai fini par le retirer.

proportionnelle des dimensions n'entrainerait d'autre conséquence que cette altération même [1]. »

Dans la deuxième étude, je m'efforçais de faire saisir ce que c'étaient que les métagéométries de Riemann et de Lobatschewsky, et d'en justifier la conception. On sait que, dans un plan Riemann, par un point on ne peut mener de parallèle à une droite, et que, dans un plan Lobatschewsky, par un point on peut mener un faisceau de non-sécantes à une droite. Inutile de rappeler que le postulatum d'Euclide énonce que par un point on peut toujours mener une parallèle, mais rien qu'une parallèle à une droite [2]. J'accordais que, dans un certain sens, ces géométries sont plus générales que la géométrie euclidienne et la comprennent l'une et l'autre comme cas particulier. Mais en même temps je faisais voir qu'elles s'appuyaient toutes deux sur la géométrie traditionnelle, qu'elles n'en étaient au fond qu'une extension. C'est ainsi qu'un système de n équations du premier degré à n inconnues est plus général qu'une équation à une inconnue et implique celle-ci comme cas particulier, mais au fond la résolution du système repose sur celle d'une équation à une inconnue. Je faisais aussi sentir que l'étrangeté des métagéométries provenait de l'emploi des termes du dictionnaire géométrique usuel dans un sens nouveau et détourné; que, du reste, cet emploi, qui, dans les premiers moments, déroutait l'esprit, était admirablement approprié à mettre en évidence les points d'attache et les analogies de l'espace euclidien avec les espaces méteuclidiens, et à faire d'Euclide le garant de Lobatschewsky et de Riemann.

[1] *Revue philosophique*, janvier 1894, p. 82. Voir aussi mon *Mégamicros*, Paris, Félix Alcan, 1895.

[2] Si je ne craignais de créer des mots barbares, je proposerais de dénommer ces trois géométries : *aparallèle, polyparallèle, monoparallèle.*

Enfin, dans la troisième étude, j'exposais combien les bases de la géométrie d'Euclide étaient fragiles, combien les définitions des notions fondamentales étaient fautives, quel arbitraire régnait dans l'énumération des axiomes et des demandes, quelles divergences séparaient les différents auteurs de traités de géométrie, et je montrais que les principes étaient à refondre. Mais, d'autre part, je découvrais les mêmes défauts dans l'exposé des principes des nouvelles géométries, les mêmes lacunes, les mêmes réticences, les mêmes subreptions, sinon de plus hardies encore. Je concluais en accordant une haute portée philosophique aux spéculations des néo-géomètres, mais en prédisant que la géométrie euclidienne, tout imparfaite qu'elle fût, continuerait encore pendant de longs siècles à initier le monde à la science des figures. « Faut-il entendre par là, ajoutais-je, qu'elle est irréprochable et qu'elle est bâtie sur le roc? Non. Les métagéomètres l'ont suffisamment ébranlée pour que l'on revienne de cette croyance [1]. »

C'est à l'édifier sur un sol plus profond et plus ferme que sont consacrées les pages qu'on va lire. L'idée n'en est pas récente.

J'étais encore au collège que déjà je cherchais une démonstration du postulatum d'Euclide. Mon condisciple et ami, M. Folie, aujourd'hui directeur de l'Observatoire d'Uccle, en faisait autant de son côté. C'était, entre nous, une véritable émulation. De temps en temps, nous nous communiquions nos espoirs... et nos déconvenues.

Nous entrâmes la même année à l'Université, lui suivant les sciences mathématiques, moi les lettres et la philosophie.

Nous cherchions toujours. Nous nous croyions appelés — la jeunesse est si présomptueuse! — à débarrasser une bonne fois

[1] *Revue philosophique*, août 1894, p. 147.

la géométrie de cette tache « scandaleuse », et ce n'était pas la persévérance — des camarades disaient l'entêtement — qui nous faisait défaut. Un jour même M. Folie crut tenir une démonstration tout à fait rigoureuse. Il me la soumit, et elle me parut telle. Il la porta à son professeur, le savant analyste Meyer. Celui-ci lui signala une proposition quelque peu louche, qualifiée comme lemme, à savoir qu'une droite tracée dans un angle rencontre *nécessairement* au moins un des côtés de l'angle. Rien d'insidieux comme les *nécessairement* et les *évidemment* dans le tissu d'un raisonnement géométrique.

A première vue, pour des écoliers comme nous, ce lemme ne ressemblait guère au postulat d'Euclide. Au fond cependant il lui était identique. Il revenait à dire qu'une droite ne peut pas être parallèle aux deux côtés d'un angle ; en d'autres termes, que par un point on ne peut mener deux parallèles à une même droite. C'est ce que nous reconnûmes bientôt.

S'être cru au but et s'en voir aussi éloigné qu'auparavant, c'était là une déception bien faite pour décourager.

Je ne me découragéai point. J'abordai le problème par un autre côté. Je ne sais plus où j'avais lu que sa solution dépendrait peut-être d'une meilleure définition de la droite. Je recherchai ce qui pouvait manquer aux définitions vulgaires. Je crus enfin en avoir trouvé une irréprochable : la ligne droite est une ligne homogène, c'est-à-dire dont toutes les portions, quelle qu'en soit la longueur, sont semblables [1]. Il ne s'agissait plus que de faire voir que cette définition était la seule bonne.

[1] Cette définition n'était pas neuve. Leibnitz, dit UEBERWEG dans la critique qu'il fait de mes *Prolégomènes de la Géométrie* (*Journal philosophique* de FICHTE, vol. 57, p. 161), fondait de grands espoirs sur ces définitions de la droite et du plan : *Recta est linea cujus pars quaevis est similis toti; plana est superficies in qua pars est similis toti.* Leibnitz dit qu'il reviendra quelque part sur ce sujet; mais Ueberweg, malgré son érudition étonnante, n'avait pu découvrir les développements annoncés.

De fil en aiguille, j'en vins à passer en revue toutes les définitions de la géométrie, et j'en étais encore à préparer mon examen final, que j'avais dans mes tiroirs tout un volume de réflexions sur les principes de cette science.

Il ne restait plus qu'à trouver où et comment je publierais mon ouvrage.

Vers ce temps-là, en 1857, on fonda les *Annales de l'enseignement public*, destinées à prendre la place du *Moniteur de l'enseignement* qui se mourait. J'y eus mes entrées comme collaborateur pour les questions de pédagogie. J'en profitai pour y glisser sournoisement deux courts articles sous le titre : *Les postulats de la Géométrie*. Ils furent peu goûtés ou, tout au moins, passèrent inaperçus. Les *Annales* d'ailleurs ne vécurent que deux ans. Je ne pense pas que *Les postulats* aient contribué à avancer ou à retarder leur mort.

Malgré mes insuccès, je persistais à penser que l'objet de mes méditations ne manquait ni d'importance ni d'intérêt.

L'année suivante, j'allai à l'Université de Bonn pour y parfaire mes études philosophiques. Mon double titre de docteur en philosophie et en sciences me valut un excellent accueil des savants qui y professaient à cette époque. Le jour de mon arrivée, Behr, le jeune professeur de physique, que la mort guettait déjà, me retenait à dîner. J'avais pour lui une lettre de recommandation de mon vénéré maître Glœsener, dont le nom, aujourd'hui presque oublié, devrait figurer à chaque page de l'histoire primitive de l'électricité. Beaucoup de sujets de conversation furent mis sur le tapis. L'attention que Behr voulait bien prêter à mes questions, m'enhardit à lui exposer quelques-unes de mes idées sur la géométrie. Il en fut frappé et m'engagea vivement à les soumettre à Ueberweg, alors pauvre privat-docent, qui avait travaillé dans la même direction.

C'est de ce moment que data mon intimité avec Ueberweg, intimité qui ne fut interrompue que par sa mort, arrivée le 9 juin 1871.

Ueberweg avait publié en 1851, dans les *Archives pédagogiques* (vol. XVII), une *Exposition scientifique des principes de la Géométrie,* qui, aujourd'hui encore, a gardé toute sa valeur philosophique. Il me la communiqua, et dès lors commença entre nous un commerce de vive voix et par correspondance — je possède des monceaux de notes, d'objections et de réponses écrites de sa main — qui ne laissa inéprouvé aucun des moellons formant les assises de cette science.

Nous prenions souvent pour arbitre son ami Lipschitz, privat-docent comme lui, avec qui il m'avait mis en rapport. C'est même Lipschitz qui me signala, dans le *Journal de Crelle,* les articles de Lobatschewsky dont je donne une courte analyse dans mes *Prolégomènes* (p. 76).

Mes maîtres de Bonn me rendirent ainsi la confiance en moi-même, que j'avais perdue. De retour à Liège, je coordonnai mes notes et j'en fis un livre pour le plan duquel feu Alphonse Le Roy, mon professeur de métaphysique, m'aida de ses conseils. C'est ainsi que je pus faire paraître en 1859 mes *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats, suivis de la traduction d'une dissertation sur les principes de la Géométrie par Fréd. Ueberweg.*

L'exposition de mes vues sur les fondements de la géométrie a donc aujourd'hui trente-sept ans de date.

Certes mes opinions n'ont pas fait leur chemin. Je suis venu trop tôt. Mon nom était inconnu ; des philosophes auxquels s'adressait spécialement mon livre, il en était peu que leurs connaissances géométriques eussent fait admettre dans l'école de Platon; et les mathématiciens d'alors — sont-ils autrement

aujourd'hui? — avaient trop en mépris la philosophie pour daigner me suivre à travers le dédale de mes critiques et de mes hypothèses. En outre, dans l'enthousiasme de la jeunesse et — l'ajouterai-je? — dans l'enivrement des premières pensées entretenu par l'atmosphère métaphysique que Kant, Hegel, et surtout Herbart, me faisaient respirer à pleins poumons, je m'étais laissé entraîner à exposer sous une forme abstraite et abstruse des idées qu'aujourd'hui je m'efforcerais d'habiller du langage ordinaire. Rien que le titre que j'avais choisi avait quelque chose de rébarbatif.

Toutefois, j'eus l'honneur d'être analysé en Allemagne et en Angleterre, et j'ai vu plus tard avec un assez vif plaisir des géomètres adopter, en me citant, telle de mes définitions ou telle partie de mon plan et de mes théorèmes [1].

En France, aujourd'hui, mon ouvrage semble s'exhumer de l'oubli, et des savants comme MM. Calinon, Lechalas, Léon Couturat, etc. [2], le citent avec éloge et font usage de sa terminologie.

[1] Je ne rappellerai que la Géométrie de M. J.-F.-V. Gérard (*The elements of Geometry, or first step in applied Logic*, Longmans, London, 1874, dans les *Advanced series* de Morell). L'auteur me cite dans sa préface; il est entré spontanément en correspondance avec moi. Il reconnaît l'influence que la lecture de mon ouvrage a eue sur son esprit. Malheureusement, il ne l'a lu, dit-il, que lorsque les deux premiers livres de sa Géométrie étaient déjà sous presse, et il a dû faire des remaniements sur les épreuves, ce qui apparaît assez visiblement.

[2] « Dans cet ouvrage, antérieur à la publication du mémoire de Riemann et aux travaux de Helmholtz et de Beltrami, M. D., n'ayant qu'une connaissance incomplète de la géométrie de Lobatschewsky (*op. cit.*, p. 77), a défini l'espace euclidien, ainsi que la droite et le plan, par l'idée d'homogénéité, et réduit les postulats fondamentaux de la géométrie à des principes rationnels. Les recherches ultérieures des mathématiciens n'ont fait que confirmer cette théorie ingénieuse et profonde, qui était, pour l'époque où elle a paru, une véritable divination. » (L. Couturat, *Revue de métaphysique et de morale*, mai 1893, p. 303.)

Bien qu'à l'âge où je suis arrivé, ma vanité, qui a toujours été peu chatouilleuse, le soit devenue moins que jamais, j'avoue que ces témoignages, presque posthumes, rendus à ce premier fruit de ma jeune pensée, ne m'ont pas trouvé indifférent. C'est même là ce qui explique en partie comment je prends plaisir à entrer dans ces détails, peut-être trop personnels, que le lecteur voudra bien me pardonner.

Pourtant une autre raison encore pourrait les justifier. Mes idées sur les fondements de la géométrie ont peu varié. Je sais que pareille invariabilité ne prouve généralement rien. Un poète a dit, non sans quelque hardiesse :

L'homme absurde est celui qui ne change jamais.

Cet apophtegme est surtout vrai en fait de science. Aussi je n'ai jamais eu honte de brûler, quand il le fallait, ce que j'avais adoré. Cependant, en géométrie, je ne me suis pas encore vu dans la nécessité de brûler quoi que ce soit. C'est pourquoi je crains, moi qu'on pouvait regarder jadis comme un novateur presque révolutionnaire, de passer aux yeux du public actuel pour un arriéré, voire un rétrograde. La métagéométrie n'est-elle pas en honneur et ne se flatte-t-elle pas d'avoir jeté la géométrie d'Euclide à bas de son piédestal et d'avoir pris sa place?

Bien que ce soit la géométrie euclidienne qui supporte l'édifice de la métagéométrie, il a été démontré, à superfluité de preuves, combien les fondements de son œuvre sont défectueux, et combien il serait nécessaire de les consolider en y remplaçant les mauvaises pierres par des pierres de meilleure qualité. Ils appellent donc une reconstruction. Or, cette reconstruction telle que je l'ai conçue, si elle est désirable au point de vue scientifique, n'a pas chance d'être accueillie comme avantageuse au point de vue pratique. Elle est trop radicale. Euclide est pour

nous une autorité comme l'a été Aristote jusqu'à Descartes. C'est un dogme que la géométrie élémentaire d'Euclide est la perfection même; qu'Euclide a donné le vrai plan, la vraie méthode, les vrais principes; que c'est tout au plus si on peut l'améliorer en quelques points secondaires; c'est Euclide qui sert à l'enseignement depuis des siècles; et chacun va répétant, comme s'il avait médité Euclide et médité la géométrie, qu'Euclide est la géométrie et qu'il n'y a pas d'autre géométrie élémentaire possible que celle d'Euclide.

Malgré le caractère imposant de ce concert, je me risque à poursuivre aujourd'hui l'entreprise dont je n'ai fait qu'esquisser le plan dans mon premier ouvrage, c'est-à-dire à mettre en forme tous les principes, définitions, axiomes et postulats, et tous les théorèmes de la géométrie plane jusques et y compris la mesure des angles, à l'exclusion de ceux concernant le cercle et la mesure des surfaces.

Cette tentative, d'un bout à l'autre absolument originale, je me permets de la mettre sous le patronage d'Ueberweg, qui l'eût certainement suivie avec intérêt. Voici ce qu'il écrivait en 1851, et je m'approprie ses paroles [1] :

« Si nous envisageons notre sujet au point de vue purement mathématique, il se présente tout d'abord une question intéressante, celle de *ramener à un nombre déterminé et le plus petit possible les propositions fondamentales de la géométrie et d'en déduire tous les théorèmes avec rigueur.*

» La géométrie d'Euclide, on le sait, n'a résolu qu'incomplètement ce problème. Outre les définitions des figures premières, lignes, surfaces, etc., elle pose, sous le nom d'*axiomes* et de

[1] Voir dans mes *Prolégomènes* la traduction de la dissertation d'Ueberweg, pp. 269 et suiv.

postulats, une suite de propositions non démontrées, sans s'expliquer, et avec raison, sur leur validité; car c'est la mission de la philosophie et en particulier de la théorie de la connaissance. Mais même sous le rapport mathématique, on peut lui reprocher :

» 1° L'énumération incomplète en fait, quoique complète en apparence, des axiomes, l'existence du plan, la comparabilité de toutes les lignes d'après leurs rapports de grandeur, l'égalité qu'on établit entre la somme de plusieurs angles et l'angle formé par les deux côtés extrêmes, d'où suit la mesure des angles; toutes ces propositions ne sont mentionnées ni parmi les axiomes, ni parmi les théorèmes; et Euclide lui-même, sans aucun doute, n'avait pas songé à en faire l'objet de son attention, les croyant implicitement comprises dans ses axiomes et postulats.

» 2° Le défaut de principe pour l'ordre des axiomes. A la vérité, il est impossible de déduire les axiomes, car ils perdraient alors ce caractère ; mais on peut les établir d'un point de vue général, de manière à en montrer l'ensemble. De là le troisième inconvénient :

» 3° Le nombre indéterminé de ces axiomes. Rien ne nous assure ainsi que les développements postérieurs de la géométrie ne nécessiteront pas une augmentation de ce nombre, comme, d'un autre côté, il n'est pas prouvé qu'on ne puisse lui faire subir une diminution en démontrant quelques uns d'entre eux.

» Malgré des efforts réitérés, ces lacunes n'ont pas encore été comblées, et la solution de la difficulté, même dans le cas où cette solution ne serait pas élémentaire, n'en aurait pas moins un grand intérêt scientifique. Nous ne voulons pas dire que plus tard on ne trouvera pas le moyen de faire entrer dans l'enseignement élémentaire les résultats de la science, mais il s'agit avant tout d'un problème scientifique et non didactique. »

Je dis plus haut que ma tentative est d'un bout à l'autre ori-

ginale. Il ne serait certainement pas facile de trouver dans ce qui va suivre dix lignes de suite qui se liraient dans d'autres ouvrages. Ce n'est pas que j'aie visé à l'originalité — c'eût été puéril — ; mais dans une science constituée comme les Grecs nous l'ont transmise, et procédant méthodiquement par définitions, propositions, démonstrations, du moment que le point de départ était modifié, des modifications correspondantes s'imposaient dans la suite. On comprend, sans plus amples développements, que les théorèmes sur la droite ne seront pas les mêmes si on la définit le plus court chemin ou la ligne homogène.

Ma tentative est encore originale sous un autre rapport. Dans les géométries traditionnelles, les théorèmes s'enchaînent parce qu'ils s'appuient les suivants sur les précédents, mais l'ordre manque en ce sens qu'il est réglé non par leur objet, mais par les nécessités de la démonstration. Ainsi, par exemple, les théorèmes sur l'égalité des triangles sont très éparpillés [1]. Or, dans ma manière de concevoir les choses, les figures doivent s'étudier en allant des simples aux composées, et la démonstration de leurs propriétés ne doit faire usage que des termes compris dans leurs définitions et dans l'énoncé du théorème. Je m'expliquerai dans la suite plus longuement sur ce point.

Enfin, — et c'est ce qui apparaîtra dès les toutes premières lignes, — je définis tous les termes dont je me sers du moment qu'ils sont pris dans un sens rigoureusement géométrique. C'est ainsi qu'à l'occasion de la définition de la géométrie, je donne celles de l'espace, de l'étendue, du lieu, de la limite, de la dimension, etc., tandis que la plupart des auteurs s'en dispensent.

[1] Dans ma pensée, ces sortes d'observations s'appliquent presque toujours à Euclide et à Legendre, les seuls auteurs que je possède bien. J'ai vu que certains manuels récents, tel celui de Rouché-Comberousse, réunissent ces théorèmes.

Voilà ce que j'ai essayé d'atteindre sans y être toujours parvenu. Cependant, j'oserais me flatter d'avoir réussi dans ce qui me tenait le plus à cœur. Je mettais en effet une espèce d'amour-propre à édifier toute la théorie de la similitude des triangles et des polygones indépendamment de la théorie des parallèles. Je ne pouvais mieux montrer cette indépendance qu'en exposant celle-ci après celle-là. Tel est le principal motif de ce renversement de l'ordre traditionnel. Il y a bien aussi un motif secondaire, un motif d'ordre, puisque la figure formée par deux parallèles et une sécante est un cas limite du triangle; mais le premier motif est pour ainsi dire la raison d'être de ce long travail.

Un mot encore. J'ai multiplié les théorèmes et les corollaires, et j'ai donné bien des démonstrations qu'on pourrait taxer d'oiseuses. C'est que j'ai tenu à n'esquiver aucune difficulté, aucune question, aucune objection, aucun doute, si léger fût-il. S'il s'agissait de faire de cette géométrie un livre d'enseignement, il y aurait à retrancher les trois quarts des pages qu'on va lire. Mais elle est avant tout une œuvre de philosophie destinée à faire la conviction dans les esprits. Je n'ai sciemment rien laissé dans l'ombre, et j'ai formulé une série considérable de propositions auxquelles les géomètres doivent avoir rarement pensé. Je voudrais obtenir de ceux qui me feront l'honneur de me suivre, qu'ils ne s'en impatientent pas, mais qu'ils m'en sachent plutôt gré. J'ai mieux aimé passer pour lourd et prolixe que pour illusionniste.

Après cet avant-propos dont le but principal est de faire saisir l'esprit de mon œuvre, j'entre en matière.

LA

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

SANS LE POSTULATUM D'EUCLIDE

NOTIONS FONDAMENTALES

CHAPITRE I. — Les définitions générales.

1. — La *géométrie* a pour *objet* les *figures*, c'est-à-dire les *déterminations* ou les *limitations de l'étendue*, et pour *but*, leur *description* [1].

2. — L'*étendue* est l'ensemble indéfini des *lieux* qui peuvent être occupés par les corps ou être le siège de leurs mouvements.

3. — Le *lieu* est ce qui reste d'un corps quand on fait abstraction de la matière qui le constitue, ou ce qui subsiste d'un mouvement quand on conserve la trace du mobile [2].

[1] Voir *Prolégomènes*, etc., pp. 172 et suiv.

[2] Mon point de départ diffère ainsi de celui d'Ueberweg et mes toutes premières définitions sont autres que les siennes. « Notre point de départ, dit-il, est donc l'intuition sensible où espace et matière sont encore confondus; l'abstraction nous donnera l'espace à part; le mouvement conduit naturellement à cette abstraction. Un corps matériel passe d'un lieu à un autre; quelque chose change : ce qui change, nous le nommons *lieu*, et notre conscience gagne ainsi l'idée du lieu comme de quelque chose d'étendu en opposition avec la matière qui peut occuper ou abandonner le lieu. » (*Prolégomènes*, pp. 275 et suiv.)

4. — L'étendue, *en tant que non déterminée* ou *limitée*, porte en géométrie le nom d'*espace*. On dit d'une figure qu'elle est tracée ou située dans l'espace, et qu'elle occupe une certaine étendue.

L'espace est ainsi le réceptacle des figures, et l'étendue est ce qui, dans les figures, tient lieu de matière.

C'est pourquoi l'on peut dire et l'on dit des figures que ce sont des *corps géométriques*, et de l'espace, en tant qu'il est considéré uniquement comme le réceptacle de ces corps, que c'est *l'espace géométrique* proprement dit, pour le distinguer, par exemple, des espaces physiques, des espaces interplanétaires, des espaces célestes, etc., et même des espaces idéaux.

Cependant il est lui-même une sorte d'espace idéal — ainsi que nous le verrons plus loin — et, à ce titre, distinct de l'espace réel.

Les figures (ou *corps géométriques*) s'obtiennent par la *détermination* ou *limitation* de l'étendue.

5. — *Déterminer* ou *limiter* l'étendue, c'est en prendre par la pensée une certaine portion en supprimant, toujours par la pensée, ce qui est en dehors de cette portion ; en d'autres termes, c'est supposer que l'étendue existe ou est *posée* d'un côté de la limite, qu'elle n'existe pas ou est *niée* de l'autre côté.

6. — Il suit de là qu'une figure, une sphère par exemple, peut être envisagée sous deux aspects opposés, *l'aspect plein* et *l'aspect vide*, suivant qu'on la suppose *pleine* d'étendue au milieu du vide, ou *vide* d'étendue au milieu du plein.

7. — L'étendue posée et l'étendue niée constituant toute l'étendue, la limite qui les sépare n'est pas de l'étendue. On la nomme *surface*; et elle a deux aspects, un aspect plein et un aspect vide, suivant qu'on la considère en se plaçant dans l'étendue niée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait le plein ; ou en se plaçant dans l'étendue posée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait le vide.

8. — La figure limitée par une surface s'appelle *figure solide*, ou simplement *solide* (plus spécialement *corps géométrique*).

9. — La surface apparait à l'esprit comme une nouvelle espèce d'étendue et, à ce titre, elle est susceptible de recevoir des déterminations. Les déterminations d'une surface sont dites *figures superficielles* et elles ont une *étendue superficielle*. La surface qui les reçoit en est le réceptacle.

10. — La figure superficielle a aussi son aspect plein et son aspect vide, suivant qu'on la considère comme formée de surface posée ou de surface niée.

11. — La surface posée et la surface niée constituant toute la surface, la limite qui les sépare n'est pas une surface. On la nomme *ligne*; et elle a deux aspects, un aspect plein et un aspect vide, suivant qu'on la considère du côté de la surface niée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait la surface posée; ou du côté de la surface posée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait la surface niée.

12. — La ligne apparait à l'esprit comme une troisième espèce d'étendue et, à ce titre, elle est susceptible de recevoir des déterminations. Les déterminations d'une ligne sont dites *figures linéaires* et elles ont une *étendue linéaire*. La ligne qui les reçoit en est le réceptacle.

13. — La figure linéaire a aussi son aspect plein et son aspect vide, suivant qu'on la considère comme formée de ligne posée ou de ligne niée.

14. — La ligne posée et la ligne niée constituant toute la ligne, la limite qui les sépare n'est pas une ligne. On la nomme *point*; et elle a aussi ses deux aspects, l'aspect plein et l'aspect vide, suivant qu'on la considère du côté de la ligne niée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait la ligne posée; ou du côté de la ligne posée, c'est-à-dire en tant qu'elle limiterait la ligne niée [1].

[1] Voir *Prolégomènes*, pp. 154 et suiv.

15. — Le point n'est susceptible d'aucune détermination autre que lui-même, c'est-à-dire autre que son lieu ou sa *place.*

Le point n'a pas d'étendue [1].

16. — Bien que le point n'ait pas d'étendue, s'il se meut en sortant de lui-même, il décrit une ligne. Cela veut dire que, si l'on conserve la trace des lieux qu'il occupe successivement, la suite de ces lieux constitue une ligne.

On dit de la ligne qu'elle a *une dimension.*

17. — Bien que la ligne ne soit pas une surface, si elle se meut en sortant d'elle-même, elle décrit une surface. Cela veut dire que, si l'on conserve la trace des lieux qu'elle occupe successivement, la suite de ces lieux constitue une surface.

Pendant ce transport, la ligne est censée pouvoir se déformer, se contourner, s'étendre jusqu'à l'infini ou se rétrécir jusqu'à l'évanouissement.

On appelle *seconde dimension* la trajectoire suivie par un point quelconque mais unique de la *génératrice,* c'est-à-dire de la ligne mobile, depuis sa première jusqu'à sa dernière place.

On dit de la surface qu'elle a *deux dimensions.*

18. — Enfin, bien que la surface ne soit pas un solide, si elle se meut en sortant d'elle-même, elle décrit un solide. Cela veut dire que, si l'on conserve la trace des lieux qu'elle occupe successivement, la suite de ces lieux constitue un solide.

Pendant ce transport, la surface est censée pouvoir se déformer, se contourner, s'étendre jusqu'à l'infini, ou bien se rétrécir jusqu'à devenir en totalité, ou par endroits, une ligne ou un point, ou même s'évanouir pour réapparaître ensuite.

On appelle *troisième dimension* la trajectoire suivie par un point quelconque mais unique de la surface génératrice depuis sa première jusqu'à sa dernière place.

On dit du solide qu'il a *trois dimensions.*

[1] Euclide dit : Le point n'a pas de partie.

19. — Le mouvement appliqué au solide ne nous paraît engendrer rien d'autre qu'un solide. Car, à chaque instant du mouvement, c'est la surface du solide, et non le solide lui-même, qui sort totalement ou partiellement du lieu qu'elle occupe et qui engendre ainsi un solide (18).

Il est à noter que, pour que ces mouvements soient possibles et concevables, il faut que l'espace, la surface, la ligne préexistent, à titre de données, au mouvement de la surface, de la ligne, du point.

20. — Nous avons ainsi, avec le point et à l'aide de trois mouvements successifs, obtenu d'abord une ligne, puis une surface, puis un solide (autrement dit un corps géométrique). C'est pourquoi l'on dit que le solide ou le corps, que l'étendue, qui est le lieu des corps en tant que déterminés, et que l'espace, qui est le réceptacle des corps en tant que possibles, ont *trois dimensions*; que la surface a *deux dimensions*; que la ligne n'a *qu'une dimension* [1]; et que le point n'a *pas de dimension*.

21. — Il suit de là que la dimension est une ligne; que la dimension d'une ligne est cette ligne même, que les deux autres dimensions sont des lignes fictives arbitraires; et qu'ainsi, en général, les *dimensions* sont des lignes qui sont censées être la trace du mouvement nécessaire pour d'un point tirer une ligne, pour d'une ligne tirer une surface, pour d'une surface tirer un solide [2].

22. — Les dimensions entrent par conséquent, d'une manière

[1] Au point de vue de la description des figures, c'est là une inexactitude. Seule, la ligne droite n'a qu'une dimension, et seule, la surface plane n'a que deux dimensions. Une ligne brisée ou une ligne courbe peut en avoir deux ou bien trois suivant que, pour la définir, il faut la supposer tracée sur un plan, ou bien sur une autre surface ou dans plusieurs plans. C'est en tant que droite ou rectifiée que la ligne n'a qu'une dimension, et en tant que plane ou planifiée que la surface n'en a que deux.

[2] Je crois qu'aucun auteur n'a essayé de donner une définition de la dimension. Je ne sais ce que vaut la mienne.

explicite ou implicite, dans l'expression de la mesure de l'étendue des solides, des surfaces et des lignes [1].

Mais quand il s'agit de la mesure des surfaces et des solides, le mot dimension prend un sens restreint et conventionnellement défini suivant le genre des surfaces ou des solides à mesurer [2].

23. — L'étendue, en tant que mesurée ou conçue comme mesurable, est une *grandeur*.

24. — Toute figure mesurable est censée limitée.

25. — La grandeur d'un solide s'appelle ordinairement *volume;* celle d'une surface, *aire* ou *superficie*, et quelquefois aussi *surface;* celle d'une ligne, *longueur*.

[1] Que l'étendue nous apparaisse avec trois dimensions, c'est un fait et un fait jusqu'à présent irréductible — analogue en lui-même à la loi d'attraction, qui lui est intimement liée. Toutefois, de même que nous pouvons concevoir une étendue à deux dimensions, — la surface ou mieux le plan, — de même nous pouvons aussi concevoir une étendue à quatre dimensions et davantage. Mais tandis que nous pouvons, pour nous représenter la surface, faire abstraction de la troisième dimension, nous sommes impuissants à imaginer une étendue à quatre dimensions parce que *la place nous manque pour introduire la quatrième dimension*. Les géométries à plus de trois dimensions sont donc imaginaires, — le terme imaginaire étant pris comme l'opposé d'imaginable, — bien qu'elles puissent avoir un caractère et une valeur réels en tant qu'elles sont une généralisation impliquant la réalité comme cas particulier. (Voir *Logique algorithmique*, Liège, Desoer, notes, pp. 13 et suiv.)

[2] Quand on dit que les deux dimensions d'un triangle sont sa base et sa hauteur, c'est qu'on admet que la base, en tant que génératrice, va se rétrécissant, pendant qu'elle se meut depuis le pied de la hauteur jusqu'au sommet (17). Si le triangle se contournait et se gauchissait, la base et la hauteur pourraient cesser d'être des lignes droites qu'on serait quand même en droit d'y voir des lignes propres à nous faire connaître les dimensions de la figure. De sorte que, d'une manière générale, deux ou trois lignes arbitraires qui se coupent dans une figure ou dans un solide et qui en atteignent les limites — car tout ce qui se mesure est censé limité — peuvent être prises pour les dimensions de cette figure. Mais le choix des lignes tracées à cet effet est déterminé par des considérations théoriques ou pratiques.

26. — Les dimensions, prises isolément, portent différents noms : *longueur*, *largeur*, *base*, *hauteur*, *épaisseur*, *profondeur*.

Ces noms sont interchangeables, en ce sens qu'on peut appeler chacune des dimensions par l'un quelconque de ces noms.

Cependant, quand il s'agit d'une simple ligne ou d'une grandeur qu'on ne considère que sous une seule dimension, on se sert plus généralement du terme *longueur*.

S'il s'agit d'une surface, les termes *longueur* et *largeur* sont ordinairement usités pour désigner la plus grande et la plus courte dimension.

Enfin, quant aux volumes, on appelle habituellement *longueur*, *largeur*, *épaisseur*, la plus longue, la moyenne, la plus petite dimension [1].

[1] L'usage a consacré certaines manières de désigner les dimensions, et les auteurs, tout en s'y conformant, négligent d'ordinaire ce chapitre au moins utile, sinon indispensable.

Ainsi on dira *hauteur* pour la dimension mesurée de bas en haut au-dessus du sol, et *profondeur* pour la dimension mesurée de haut en bas au dessous du sol, principalement dans le vide. On dira donc la hauteur d'un nuage, d'une tour, d'une berge ; la profondeur d'un précipice, d'un puits, d'une rivière.

Le mot *profondeur* est encore le plus ordinaire pour la mesure d'un creux, tandis que l'*épaisseur* se dira de la mesure d'un plein : la profondeur d'un bâtiment, d'une armoire, d'une caisse; l'épaisseur d'un massif de maçonnerie, d'un pilier, d'une poutre.

On dira aussi *la longueur du pont* et *la largeur du fleuve*, bien qu'il s'agisse ici de la même mesure. Mais c'est que la longueur est la grande dimension du pont, et que la largeur est la petite dimension du fleuve.

S'il s'agit d'un terrain longeant un chemin ou une rue, l'usage s'est établi de dire *largeur* pour sa dimension à front du chemin ou de la rue, et *profondeur* pour l'autre dimension perpendiculaire à celle-ci. Par conséquent, en parlant d'une maison, on donnera sa largeur, sa profondeur et sa hauteur.

Quand la surface à mesurer est dressée, par position naturelle ou par destination, comme une porte, une fenêtre, un tableau, une gravure, une glace, on donne le nom de *hauteur* à la dimension qui serait à mesurer de bas en haut, et l'autre dimension prend toujours le nom de *largeur*.

Pour certaines surfaces géométriques comme les rectangles, les triangles, les trapèzes, les termes usités sont ceux de *base* et de *hauteur*, la base étant

27. — On nomme en général *hypothèses*, et en géométrie plus spécialement *postulats*, des propositions qu'on demande d'accepter provisoirement comme vraies pour servir de fondement à la science. Si elles sont justes, leur légitimité et leur solidité se manifesteront au fur et à mesure que la science s'édifiera.

28. — En géométrie, on nomme *axiomes* d'autres propositions du domaine de la logique, de l'arithmétique et de l'algèbre, que ces sciences ont démontrées, et qui, par conséquent, sont censées, pour le géomètre, ne plus avoir besoin de démonstration [1].

29. — Le *problème* est une question que l'on fait concernant les objets d'une science.

Le *problème géométrique* est une question que l'on fait concernant les figures.

La réponse à un problème se nomme *solution* ou *résultat*.

30. — Le *théorème* est l'énoncé général du résultat des problèmes de même espèce.

un certain côté de la figure, la hauteur étant la perpendiculaire élevée sur ce côté. Mais quand on mesure certains solides, tels que parallélipipèdes, prismes, cylindres, pyramides, cônes, etc., on appelle *base* la surface sur laquelle on se les représente comme appuyés.

Quand, dans une surface, les deux dimensions sont égales, on garde d'habitude le terme *largeur* : la *largeur* d'un étang (circulaire).

Si, dans un solide, deux ou trois dimensions sont égales, on gardera le terme épaisseur : l'*épaisseur* d'une colonne, d'un cube.

[1] Cette définition est presque l'opposé de la définition vulgaire qui veut que l'axiome — à la différence du théorème — soit *une vérité évidente par elle-même*, en d'autres termes, *n'ayant pas besoin de démonstration*. Malheureusement cette définition implique une définition de l'évidence, et c'est parce que l'on n'a jamais pu fournir cette dernière que l'on s'est querellé et qu'on se querelle encore sur le point de savoir si le postulat d'Euclide ne devrait pas être compté au nombre des axiomes, et si la définition courante de la ligne droite, *le plus court chemin entre deux points*, est bien une définition, et si ce n'est pas plutôt un axiome ou un postulat.

La *démonstration* du théorème est la généralisation de la preuve du résultat des problèmes de même espèce.

De là on a pu dire que le théorème est l'énoncé d'une vérité qui devient évidente à la suite d'une démonstration [1].

31. — Le *lemme* est une proposition, claire par elle-même, employée subsidiairement comme prémisse ou comme explication à l'occasion d'une démonstration particulière.

32. — Le *scolie* est une remarque ou commentaire servant à mettre en relief la portée d'un théorème ou ses rapports avec d'autres théorèmes déjà démontrés.

33. — Le *corollaire* est une proposition qui découle directement d'un théorème, qui n'en est qu'une extension, et qui ne demande pas à être démontrée à part, si ce n'est sommairement.

34. — On appelle *définition* la description des figures.

35. — Hypothèses ou postulats, axiomes, problèmes, théorèmes, lemmes, scolies, corollaires et définitions portent le nom générique de *propositions*.

CHAPITRE II. — Les hypothèses ou postulats de la géométrie.

36. — I. L'espace géométrique (4) est fait *homogène*, c'est-à-dire que, dans toutes ses parties, quelle qu'en soit la grandeur, il est censé susceptible de recevoir les mêmes déterminations.

De là :

1° L'universalité idéale des propositions de la géométrie;

2° La validité générale des démonstrations, indépendamment de la grandeur des figures qui en sont l'objet.

Par conséquent, le géomètre n'a égard ni au lieu ni à la grandeur de ses figures, qu'elles soient tracées sur une feuille de papier, sur un tableau, sur une place publique, ou dans l'immensité du ciel.

[1] Voir *Prolégomènes*, pp. 101 et suiv.

Scolie 1. — L'homogénéité est donc ce qui distingue l'espace géométrique de l'espace réel. L'espace réel est hétérogène. Le corps le plus inaltérable ne peut s'y déplacer si peu que ce soit sans éprouver d'innombrables modifications dans sa constitution la plus intime. C'est ainsi, par exemple, qu'il sera altéré dans son poids pour peu qu'il s'élève ou qu'il s'abaisse et que même il le perdra s'il descend jusqu'au centre de notre globe, ou s'il monte dans cette région où l'attraction de la Lune contre-balance celle de la Terre. Dans l'espace géométrique, au contraire, le déplacement d'une figure la laisse absolument intacte; elle est là ce qu'elle était ici et dans la Lune ce qu'elle était sur la Terre.

Scolie 2. — Il y a plus. Quelle que soit la portion de l'espace géométrique que l'on considère, elle est susceptible de recevoir toutes les déterminations imaginables, parce qu'elle est l'image agrandie ou réduite de toute autre portion. C'est ainsi que, dans un espace grand comme la sphère céleste, il n'y a pas un point qui n'ait son représentant distinct dans une sphère de quelques décimètres de diamètre, dans une sphère grande comme une goutte d'eau, en un mot, aussi petite que l'on veut. Géométriquement parlant, on pourrait, sur un de ces globes terrestres qui servent dans les écoles, indiquer la place exactement correspondante de chaque point de la Terre. L'espace géométrique est indéfiniment extensible et indéfiniment contractile. C'est sur cette propriété que repose la légitimité des agrandissements et des réductions dont on fait tant usage dans les arts du dessin.

Mais cette propriété est en soi contradictoire, puisqu'elle implique qu'il y a autant de termes partiels dans le moins que dans le plus, dans le petit que dans le grand, dans la partie que dans le tout [1].

[1] Une simple image peut faire saisir cette contradiction dans toute sa force, mais aussi dans toutes ses étonnantes conséquences. Un cercle est l'image d'un autre cercle. Figurons nous donc une série infinie de cercles concentriques de plus en plus petits, et des êtres ayant la forme de petits arcs de cercle, rangés en se touchant du coude sur le pourtour d'une cir-

C'est pourquoi l'espace géométrique est un espace imaginaire, idéal, un espace abstrait et simplifié au delà de toute expression. Seulement cette simplification facilite et rend possible l'étude des figures réelles qui, sans elle, serait inabordable.

Scolie 3. — Enfin les déterminations géométriques ne sont pas exclusives d'autres déterminations; en d'autres termes, l'espace géométrique est indéfiniment pénétrable. Dans l'espace réel, les corps se repoussent en ce sens qu'ils ne peuvent être plusieurs dans le même lieu. Dans le même espace géométrique, coexistent toutes les figures possibles. L'une n'exclut pas l'autre, et le lieu d'une figure est le lieu d'une infinité de figures identiques ou différentes [1].

37. — II. Par une particularisation de ces propriétés de l'espace géométrique, on conçoit des *surfaces homogènes*, c'est-à-dire telles que toutes leurs parties, quelle qu'en soit la grandeur, sont susceptibles de recevoir les mêmes déterminations.

conférence. Ces êtres marchent vers le centre sans déformer leur rang. Pour cela il faut qu'ils diminuent de taille au fur et à mesure qu'il font du chemin. Quand ils ont parcouru la moitié du rayon, ils ont perdu la moitié de leurs dimensions. Par cela même leurs pas sont devenus plus courts de moitié, et à leurs yeux la distance qui les sépare du centre n'a pas diminué, car ils ont encore le même nombre de pas à faire. Arrivés aux trois quarts de leur route, ils ne sont pas plus avancés. Leur taille a diminué des trois quarts, leur pas aussi, de manière que le quart du rayon qui leur reste à parcourir, leur fait l'effet d'être aussi grand que l'était le rayon entier au moment où ils se sont mis en marche. Ces êtres, s'ils sont intelligents et s'ils n'ont aucun indice qui leur donne le soupçon de leur rapetissement, doivent s'imaginer que le centre, but de leurs efforts, est situé à l'infini et qu'ils ne l'atteindront jamais.

Et, en effet, ils ne l'atteindront jamais, — à moins que, par un phénomène analogue, le temps ne se précipite au fur et à mesure que le rayon diminue, autrement dit que, dans le même intervalle de temps absolu, le nombre des pas n'augmente en proportion qu'ils deviennent plus courts.

[1] Est-il nécessaire de faire remarquer que ces scolies ne devraient pas, avec tous leurs développements, figurer dans une géométrie élémentaire? Le lecteur fera sans peine le départ de ce qui est d'ordre didactique — comme le premier alinéa du deuxième scolie — et de ce qui est d'ordre philosophique; et il appliquera la même remarque à plusieurs des scolies qu'il va lire.

On appelle *plans* de telles surfaces, et l'on nomme *figures planes* les figures tracées sur un plan.

38. — III. Par une nouvelle particularisation, on conçoit des *lignes homogènes*, c'est-à-dire telles que toutes leurs parties, quelle qu'en soit la grandeur, sont susceptibles de recevoir les mêmes déterminations.

On appelle *droites* ou *lignes droites* de telles lignes, et l'on nomme *figures rectilinéaires* [1] les figures tracées sur une droite.

Scolie. — Le plan et la droite sont des *intuitions*, c'est-à-dire des conceptions qui se voient dans et par l'esprit.

Ce sont aussi des *données* (19) au même titre que l'espace. De même que, sans de l'espace, on ne peut créer l'espace, mais que, du moment qu'on a une portion d'espace, si petite soit-elle, on peut — si l'on veut, bien que ce ne soit pas nécessaire — l'agrandir par l'imagination, et la multiplier indéfiniment; de même, sans une portion de plan donnée au préalable, on ne peut construire un plan, ni, sans une portion de droite donnée au préalable, tracer une droite.

Par anticipation, disons ici que la portion de plan nécessaire pour construire le plan est censée être fournie par l'instrument appelé *rabot*, et la portion de droite indispensable pour tracer une droite, censée être fournie par l'instrument appelé *règle.*

39. — IV. De l'homogénéité de l'espace découle cette conséquence que la même figure peut être représentée par une infinité de figures plus grandes ou plus petites.

Ce par quoi ces figures diffèrent, c'est ce que nous avons appelé leur *grandeur* (25); ce par quoi elles se ressemblent, c'est la *forme.*

La forme est ainsi indépendante de la grandeur et peut rester la même quand la grandeur change, et inversement [2].

[1] Je n'ai pas pu me servir du terme tout indiqué de *figures rectilignes*, parce que l'usage désigne par là des figures composées de lignes droites suivant deux ou trois dimensions de l'espace.

[2] Voir *Prolégomènes*, pp. 129 et suiv.

10. — Nous avons dit (2) que le but de la géométrie est la description des figures. Nous pouvons maintenant préciser davantage ce but et dire que c'est la recherche des éléments de la mesure de leur grandeur et de ceux de la description de leur forme.

11. *Définitions.* — Deux figures qui ont même forme et même grandeur sont *égales*.

Elles sont *identiques* quand elles sont susceptibles d'occuper exactement le même lieu (espace, surface ou ligne), ou, comme on dit encore, quand elles sont *superposables;* elles sont *symétriques* si, pour les placer dans le même lieu, il faut faire de l'aspect vide de la limite de l'une d'elles l'aspect plein et inversement [1].

Cette dernière opération s'appelle *retournement* [2], *rabattement* ou *demi-tour* suivant qu'elle s'applique à une figure spatiale, plane ou rectilinéaire.

Dans les figures égales, les parties qui se superposeraient si l'on superposait les figures, c'est-à-dire si on les mettait dans le même lieu, sont dites *similaires* (par *identité* ou par *symétrie*).

12. *Définitions.* — Deux figures qui ont même forme mais non même grandeur, sont *semblables*.

Les figures semblables deviennent égales par agrandissement ou rapetissement, autrement dit par *majoration* ou *minoration*.

Majorer et *minorer,* c'est changer la grandeur d'une figure, soit en l'agrandissant, soit en la rapetissant, sans en altérer la forme.

Nous nous servirons en général des termes *majorer* ou *majo-*

[1] Voir dans mes *Prolégomènes*, pp. 244 et suiv., la critique de la définition ordinaire de la symétrie; et pp. 154 et suiv., la critique de la définition de l'équivalence.

[2] Cette opération, l'imagination ne la saisit pas et l'esprit ne la conçoit que par analogie. Mais ce que l'on comprend d'emblée, c'est que l'identification des solides suppose que l'un est considéré comme vide si l'autre est considéré comme plein.

ration pour indiquer tout changement de grandeur en plus ou en moins non accompagné de changement de forme.

Dans les figures semblables, les parties qui deviendraient similaires si par majoration on rendait ces figures égales, sont dites *homologues* [1].

Scolie. — L'espace géométrique, le plan et la droite peuvent ainsi être caractérisés par la propriété d'admettre des figures semblables.

On verra par la suite que la forme d'une figure dépend uniquement de la proportionnalité de grandeur des éléments linéaires, de la valeur des éléments angulaires et de l'ordre des uns et des autres. De sorte que la majoration n'a d'autre résultat que de changer la grandeur absolue des éléments linéaires sans en altérer la proportionnalité.

L'espace non géométrique, les surfaces autres que les plans, les lignes autres que les lignes droites ne possèdent pas cette propriété [2].

43. *Définitions.* — Deux figures qui ont même grandeur mais non même forme, sont *équivalentes*.

Les figures équivalentes peuvent devenir égales par *déformation* ou *transformation*.

Déformer ou *transformer*, c'est changer la forme tout en conservant la grandeur.

Transformer signifie plus spécialement donner une autre forme déterminée (par exemple, transformer un triangle en carré).

44. *Définitions* — L'espace géométrique, le plan, la droite, étant homogènes, sont indéfiniment divisibles en parties semblables.

On nomme *isogènes* les figures qui sont indéfiniment

[1] Voir dans mes *Prolégomènes*, pp. 136 et suiv., la critique de la définition usuelle de la similitude.

[2] Tel est le point de départ des métagéométries. Elles ont appliqué à l'espace les propriétés de certaines surfaces et de certaines lignes autres que le plan et la droite.

divisibles en parties égales (tels l'angle, la circonférence, la sphère, etc.).

L'espace, le plan, la droite sont également isogènes.

On nomme *continues* les figures qui sont indéfiniment divisibles en parties équivalentes.

L'espace, le plan, la droite, ainsi que les figures isogènes, sont également continues.

CHAPITRE III. — Les axiomes.

Axiomes logiques.

15. — I. Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.

Cor. 1. — Deux figures identiques à une même troisième sont identiques (41).

Cor. 2. — Deux figures semblables à une même troisième sont semblables (42).

Cor. 3. — Deux figures équivalentes à une même troisième sont équivalentes (43).

Cor. 4. — Quand à deux quantités égales on fait subir les mêmes opérations, qu'on leur ajoute ou qu'on en retranche la même quantité, qu'on les multiplie ou qu'on les divise par le même facteur, les résultats sont égaux.

Cor. 5. — Deux figures identiques, soumises à la même majoration ou à la même déformation, fournissent deux figures identiques.

16. — II. Une quantité qui n'est ni plus grande ni plus petite qu'une autre de même espèce lui est égale.

17. *Définitions* [1]. — Toute proposition est susceptible de *conversion* et de *contraposition*.

[1] Dans l'enseignement, on pourrait réserver ces considérations pour le moment où les élèves seraient déjà familiers avec les théorèmes susceptibles de conversion ou de contraposition.

Elle est *convertie* quand de son sujet et de son attribut on fait respectivement son attribut et son sujet.

La proposition ainsi obtenue porte le nom d'*inverse* pour la distinguer de la proposition non convertie qui portera le nom de *principale.*

Cor. — La principale est l'inverse de l'inverse prise comme principale.

Elle est *contraposée* quand de son sujet et de son attribut on tire un sujet et un attribut négatifs.

La proposition ainsi obtenue porte le nom de *réciproque.*

Enfin quand il y a à la fois conversion et contraposition, on obtient la réciproque de l'inverse, ou, ce qui revient au même, l'inverse de la réciproque.

Cette proposition portera le nom de *dérivée.*

Cor. — La réciproque est la dérivée de l'inverse.

Exemple : Deux droites parallèles sont deux droites ayant même direction — proposition *principale;*

Deux droites qui ont même direction, sont deux droites parallèles — proposition *inverse;*

Deux droites qui ne sont pas parallèles, n'ont pas même direction — proposition *réciproque ;*

Deux droites qui n'ont pas même direction, ne sont pas parallèles — proposition *dérivée.*

48. *Définitions.* — On nomme *jugement hypothétique* un jugement composé de deux propositions, l'une appelée *condition,* et l'autre *conséquence,* par lequel on affirme que, si la condition est réalisée, la conséquence l'est aussi.

Scolie. — Tout jugement hypothétique peut être mis sous la forme inverse, sous la forme réciproque et sous la forme dérivée.

Par la forme inverse on affirme que, si la conséquence est réalisée, la condition l'est également; et par la forme réciproque, que, si la condition n'est pas réalisée, la conséquence ne l'est pas non plus. Enfin, par la forme dérivée on affirme que, si la conséquence n'est pas réalisée, c'est que la condition ne l'est pas.

Exemple : *Principale.* — Si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont aussi égaux ;

Inverse. — Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux ;

Réciproque. — Si dans un triangle deux côtés ne sont pas égaux (sont inégaux), les angles opposés à ces côtés sont inégaux ;

Dérivée. — Si dans un triangle deux angles sont inégaux, les côtés opposés à ces angles le sont aussi.

Lemme. — Une proposition peut toujours se mettre sous la forme d'un jugement hypothétique. Exemple : Si deux droites ont même direction, elles sont parallèles.

De même, un jugement hypothétique peut s'exprimer sous la forme d'une proposition. Exemple : Dans un triangle, l'égalité de deux angles entraîne l'égalité des côtés opposés à ces angles.

49. — III. Un jugement et sa dérivée sont toujours vrais ou faux en même temps.

Il en est de même de l'inverse et de la réciproque, puisque la réciproque est la dérivée de l'inverse (47, corol.).

Cor. — Il suit de là que, si des quatre formes de jugements exprimées comme il a été dit plus haut à l'aide de la conversion et de la contraposition, lesquelles nous désignerons par les lettres *p* (principale), *i* (inverse), *r* (réciproque) et *d* (dérivée), l'un des couples *pi*, *pr*, *id* et *rd* se compose de propositions vraies ou fausses à la fois, les deux propositions restantes participent de la vérité ou de la fausseté des premières.

50. *Scolie.* — L'axiome III et son corollaire sont des théorèmes qui se démontrent en logique de la manière suivante :

Supposons que S ne puisse être que P ou Q et que S′ ne puisse être que P′ ou Q′, de sorte que la proposition S est P équivaut à la proposition S n'est pas Q ; je dis que, si quand S est P, on a toujours $S' = P'$ et si quand S est Q, on a toujours $S' = Q'$, alors quand $S' = P'$, on a toujours $S = P$, et quand $S' = Q'$, on a toujours $S = Q$.

Démonstration. — Car, si quand $S' = P'$, on avait non $S = P$

mais bien $S = Q$, on irait contre la supposition qui dit que si $S = Q$, on a toujours $S' = Q'$ et non pas $S' = P'$.

Ce genre de démonstration s'appelle *démonstration par l'absurde.* Il consiste à supposer fausse la conséquence et à en tirer la fausseté de la condition.

Applications. — Des quatre propositions énoncées plus haut (48) sur les côtés et les angles d'un triangle, il suffit de démontrer soit la première et la seconde, soit la première et la troisième, ou bien la seconde et la quatrième ou la troisième et la quatrième pour qu'elles soient démontrées toutes les quatre.

Cette remarque s'applique aux définitions. Ainsi pour que la définition des parallèles soit adéquate, il faut que les quatre propositions qui s'y rapportent soient vraies, et pour qu'il en soit ainsi, il suffit que la première avec la seconde ou avec la troisième ou bien encore que la dernière avec la troisième ou avec la seconde soient vraies à la fois.

51. — C'est ce qu'exprime la règle que *toute définition doit être inversible* ou *réciprocable* (34).

Axiomes arithmétiques.

52. — IV. Toute quantité peut être considérée comme égale à la somme ou à la différence de deux quantités de même espèce convenablement choisies.

Cor. — Toute quantité peut être considérée comme égale à la somme de ses parties.

53. — V. Quand à deux quantités inégales on ajoute des quantités égales, les sommes obtenues sont inégales dans le même sens;

De même, quand de deux quantités inégales on retranche des quantités égales, les restes sont inégaux dans le même sens;

54. — VI. Au contraire, quand de deux quantités égales on retranche des quantités inégales, les restes sont inégaux en sens opposé.

Axiomes algébriques [1].

33. — VII. Toute quantité peut être traitée comme étant le multiple ou le sous-multiple (entier ou fractionnaire) d'une quantité de même espèce.

[1] Ces axiomes tranchent le problème des incommensurables. En tout état de cause, qu'elles soient théorèmes ou qu'elles soient postulats, les propositions sur le rapport des incommensurables sont du ressort de l'algèbre et non de la géométrie, et elles doivent figurer parmi les axiomes de cette dernière science. Voici ce que j'écrivais en 1856 et imprimais en 1859 : « La plupart des auteurs ont admis comme axiome le postulat arithmétique que *le tout est égal à la somme de ses parties*... Mais aucun d'eux n'a posé ni en axiome ni en postulat que *le tout peut être considéré comme étant le multiple d'une de ses parties*... (Suit la démonstration comme quoi les moyens par lesquels on croit éviter les incommensurables sont illusoires.) Ce postulat, inévitable en algèbre, où les quantités sont, de leur nature, continues, l'est aussi en arithmétique : l'équation $^1/_3 = 0,333...$ n'est autre chose qu'une comparaison entre incommensurables, entre $^1/_3$ et les puissances négatives de 10. L'extraction des racines repose sur ce postulat. Vouloir extraire la racine de 2 et opérer sur le nombre 2 comme si c'était un carré parfait, c'est admettre *a priori* que tout nombre peut être considéré comme un carré, ce qui, encore une fois, est un cas particulier de ce postulat.

» Dès que l'on admet comme vrai que, quelle que soit la grandeur des portions AB et CD d'un quantum isogène, on peut poser $AB = mCD$, c'est-à-dire leur supposer une commune mesure, on peut démontrer immédiatement les théorèmes généraux... qui servent à coordonner tous les théorèmes particuliers, mesure des angles, plans et dièdres, des parallélogrammes de même base, des parallélipipèdes, etc. » (*Prolégomènes,* pp. 148-153.)

Depuis que ces lignes ont été écrites, il paraîtrait que le problème des incommensurables est définitivement résolu. Je ne me suis pas tenu au courant de la littérature. Il ne me coûte rien de faire ingénument cet aveu, bien qu'on puisse — trop facilement hélas ! — en tirer argument contre moi. Toutefois j'ai voulu lire et j'ai lu et relu le plus attentivement qu'il m'a été possible la longue note de Rouché-Comberousse sur la méthode des limites. Je ne suis pas arrivé à la comprendre, ni surtout à comprendre en quoi cette méthode est rigoureuse. Or, j'ai toujours pensé qu'une démonstration étendue et difficile à suivre d'une vérité, pour ainsi dire, d'intuition, est mauvaise. En définitive, il s'agit de démontrer que deux droites sont entre elles comme leurs longueurs, c'est-à-dire comme leurs mesures (23, 24 et 25). Eh bien, je demande si, quand elles n'ont pas de commune mesure, elles

Cor. 1. — Toute quantité peut être traitée comme étant le multiple d'une quelconque de ses parties.

n'ont aucun rapport entre elles, ou si le rapport pourrait être autre que celui de leurs mesures. (Voir théorèmes 67 et 72.) Ah! je sais que l'on définit ce rapport — qui, notons-le, est *invariable* — comme étant la limite dont se rapproche, *autant que l'on veut,* c'est-à-dire à une fraction près aussi petite que l'on veut, soit en plus, soit en moins, un rapport indéfiniment *variable.* Je crains qu'il n'y ait là des mots destinés à masquer et à esquiver une difficulté très subtile, mais, à mon sens, plus imaginaire que réelle. Une fraction n'est jamais nulle, quelque grand que soit son dénominateur. On aura beau diviser indéfiniment en deux parties égales une droite, on n'arrivera pas à l'évanouissement de la droite. Bien mieux, en vertu de l'homogénéité de la droite, la plus éloignée des divisions n'a absolument rien perdu de sa capacité à être divisée, de sorte que l'accroissement du dénominateur n'a qu'un effet illusoire.

Une considération capitale domine d'ailleurs tout le problème des incommensurables : c'est que, *en pratique,* il n'y a pas d'incommensurables. Dans chaque cas particulier, on trouvera toujours une commune mesure satisfaisante, par exemple, pour la diagonale et le côté d'un carré donné. C'est la *théorie* seule qui nous enseigne qu'elle sera fautive. C'est ainsi que les anciens avaient démontré, sans recourir aux limites, que si ces lignes avaient une commune mesure, les nombres qui les évalueraient, ne pourraient être ni pairs ni impairs, et que, par conséquent, elle n'existe pas.

Du reste, on peut pousser loin le chapitre des incommensurables. Deux droites égales n'auront pas de commune mesure si l'on veut mesurer l'une par les puissances négatives de 2, et l'autre par les puissances négatives de 3; je veux dire ceci que, si loin qu'on pousse chez l'une la division par 2, chez l'autre la division par 3, on n'aboutira jamais à deux quotients égaux; et pourtant personne ne contestera que l'équation $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{3})^y$ soit légitime, bien qu'on ne puisse trouver pour x et pour y des nombres entiers.

Enfin, une proportion telle que $C : D = c : d$, où les antécédents et les conséquents représentent respectivement des côtés et des diagonales de carré, et qui exprime par conséquent l'égalité de deux rapports entre incommensurables, est identique avec la suivante $C : c = D : d$, qui exprimera l'égalité de deux rapports entre commensurables, si, par exemple, $C = 2c$.

Mais en voilà à la fois trop et trop peu sur ce sujet étranger à mon travail. J'ajoute seulement, puisqu'il n'entre pas dans mon plan de traiter de la mesure des surfaces, que, si l'on admet que deux portions de droite sont entre elles comme leurs longueurs (théorème 67), il s'ensuit immédiatement que deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Cor. 2. — Toute partie de quantité peut être traitée comme étant le sous-multiple du tout.

N. B. — Comme on le voit, les termes de multiple et de sous-multiple sont employés, en vue de la brièveté, dans un sens plus large qu'on ne le fait d'ordinaire.

56. — VIII. Sont encore des axiomes, toutes les propositions de l'algèbre sur l'addition et la soustraction, sur la multiplication et la division, sur l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, et notamment sur les proportions.

LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DU RABOT [1].

Observations préliminaires.

Avant d'aborder l'étude de la droite et des figures planes rectilignes, je désire présenter quelques observations sur l'ordre de succession des théorèmes.

Le plan d'une géométrie rationnelle est bien simple. On doit commencer par la géométrie à une dimension, c'est-à-dire la géométrie de la droite considérée en elle-même ou comme constituant à elle seule l'espace géométrique. La droite est le réceptacle des figures rectilinéaires.

Puis on abordera la géométrie des figures planes, c'est-à-dire à deux dimensions. Le plan est le réceptacle de ces figures.

Enfin viendra la géométrie à trois dimensions. Les figures à trois dimensions ont pour réceptacle l'espace géométrique.

L'ordre des propositions dans chacune de ces parties va naturellement du simple au composé.

[1] Qu'on veuille bien me passer ce titre, qui sent la recherche. On dit parfois la géométrie de la règle et du compas pour dire la géométrie usuelle. C'est de cette dénomination que M. Renouvier s'est servi pour son récent travail sur la géométrie. Comme je ne traite dans le mien que de la droite, du plan et des figures rectilignes et qu'il n'y est qu'incidemment question du cercle, j'ai voulu, par ce titre, bien spécifier le caractère de l'espace euclidien, où le plan, pure donnée hypothétique, est fourni par une droite qui court sur deux parallèles.

Ainsi dans la géométrie de la droite, les figures iront se compliquant d'après le nombre de points marqués sur la droite. Nous étudierons donc d'abord la droite, puis la semi-droite, puis la portion de droite, puis enfin les figures que nous désignons sous le nom de droites interrompues, qui sont discontinues et composées de portions de droites.

Dans la géométrie du plan, on considérera d'abord le plan, puis le plan dans ses rapports avec la droite; puis les figures formées de deux droites, c'est-à-dire les angles, les coins et les parallèles; puis les triangles, les sécantes et les polygones; enfin le cercle, d'abord isolé, ensuite combiné avec des droites ou d'autres cercles.

Dans la géométrie des solides, on suivra un ordre analogue.

Pourtant il ne faudrait pas adopter pareille disposition *ne varietur*. Il est clair, par exemple, que la géométrie du triangle est interminable, et qu'il ne s'agit pas de vouloir l'épuiser avant d'aborder le cercle.

Quant à l'ordre des propositions, il est par là tout indiqué. Mais l'important c'est de ne laisser subsister aucune lacune, de ne laisser place à aucun pourquoi. Nombreuses sont les lacunes dans les géométries en usage. Et rien ne froisse autant l'esprit que de voir un géomètre se donner beaucoup de mal pour démontrer un théorème très simple, lorsqu'il ne s'est pas donné la peine de démontrer, ou qu'il n'a pas vu qu'il y avait à démontrer un théorème préalable, quelquefois beaucoup plus récalcitrant. C'est ainsi que, tout au début du Ve livre de sa *Géométrie*, Legendre, partant de sa définition du plan, établit par les théorèmes I et II : 1° qu'une droite ne peut être en partie dans le plan et en partie dehors; 2° que trois points déterminent un plan. Puis tout d'un coup il passe au théorème III, qui porte que, quand deux plans se coupent, c'est suivant une ligne droite. Or, il a oublié au préalable de montrer que deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point commun, proposition qui n'est pas commode à prouver. Par conséquent, dût-on, pour l'asseoir, passer par des figures plus compliquées que celles qui suivront, il faudrait en prendre son parti, en attendant mieux.

Un autre point est à considérer. On se plaît à vanter chez Euclide l'enchaînement rigoureux des propositions, tout en regrettant parfois que l'ordre y laisse quelque peu à désirer. Les géomètres modernes ont essayé de remédier à ce défaut, mais sans y réussir tout à fait. Ils nous font rarement voir la raison du groupement des théorèmes, et l'on ne saisit souvent qu'après coup pour quel motif ils introduisent au milieu de propositions connexes telle autre qui en interrompt la suite naturelle, et qui ne vient que comme auxiliaire d'une démonstration. Telle est, par exemple, la proposition que si deux triangles ont deux de leurs côtés égaux chacun à chacun, l'inégalité des troisièmes côtés sera dans le même sens que l'inégalité des angles opposés. Cette proposition, qui s'appuie elle-même sur les propriétés de la bissectrice, ne sert qu'à démontrer l'égalité des triangles qui ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Quant à nous, nous pensons qu'un théorème doit, en général et autant que possible, se démontrer par les seules données impliquées dans son énoncé. C'est ainsi que nous démontrerons en manière d'exemple, sans le secours d'aucun théorème antérieur, sinon de ceux relatifs à l'égalité des triangles, le théorème fondamental sur la similitude des triangles.

Ceux qui voudront bien étudier avec soin et attention la manière dont nous avons disposé les théorèmes, verront qu'ils ne s'appuient les uns sur les autres qu'en tant qu'ils ont rapport au même objet. C'est ainsi que les propositions sur l'égalité des triangles forment un groupe qui se tient. Mais ce groupe n'a aucun rapport avec celui des propositions sur les distances ; et même nous nous sommes donné la satisfaction de ne nous servir de la propriété de la ligne droite d'être le plus court chemin qu'après avoir épuisé les triangles et leur similitude. Chose plus méritoire encore, si nous osons parler ainsi de notre œuvre, les propositions sur la similitude des triangles viennent avant la théorie des parallèles. En un mot, on peut, pour ainsi dire, prendre les différents groupes de nos théorèmes et les brouiller, sans que l'enchaînement et la rigueur du raisonnement en souffrent le moins du monde.

Je voudrais ajouter encore un mot. Ceux-là seuls qui ont longtemps médité les questions ardues que soulève la géométrie élémentaire, pourront apprécier quelle somme de travail et de réflexions représente parfois une simple définition ou un théorème puéril. Mon essai est une œuvre de théorie philosophique, non de pédagogie, bien que je ne fasse pas fi de sa portée didactique. Mon unique ambition a été de la composer de manière que l'ongle, en passant sur elle, n'éprouve aucun arrêt et ne sente aucune jointure.

Je me suis abstenu avec un soin scrupuleux de ces démonstrations écourtées auxquelles les philosophes ont volontiers recours, faute d'autres, quand ils s'adressent aux gens du monde.

De là cette lenteur de ma marche, cette multiplication des propositions, des corollaires, des scolies, dont j'aurais pu supprimer sans inconvénient une bonne moitié au moins, si je n'avais pas voulu éviter à tout prix le reproche d'escamoter une difficulté. Cependant si mes principes étaient adoptés dans l'enseignement, je ne crains pas d'affirmer que la géométrie n'y perdrait rien de son pouvoir éducatif pour la rectitude du jugement. On peut ranger la géométrie d'Euclide au nombre des plus excellents chefs-d'œuvre de l'esprit humain, sinon le plus excellent — qu'on la compare avec nos algèbres! Cependant elle a ses imperfections et parfois le raisonnement y fait un saut. Ce n'est pas perdre sa peine que de s'attacher à faire disparaître ces imperfections, et à construire des ponts ou tracer des passages qui permettent de s'y mouvoir à l'aise et sans danger.

CHAPITRE IV. — La droite et les figures rectilinéaires.

57. *Définition.* — La *droite*, réceptacle des figures rectilinéaires (12), est une ligne *homogène*, c'est-à-dire dont toutes les parties, quelle qu'en soit la longueur, sont semblables (38) [1].

[1] « La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont la notion est familière à tout le monde et dont un fil tendu offre l'image. » (Rouché-Comberousse.)

Inverse. — Toute ligne homogène est une ligne droite.

Réciproque. — Aucune ligne non droite n'est homogène.

Dérivée. — Aucune ligne non homogène n'est une ligne droite.

Scolie 1. — Ces quatre propositions, qui se réduisent à deux (49), font partie des postulats ou hypothèses de la géométrie. Leur légitimité et leur solidité se manifesteront à mesure que les conséquences qu'on en tirera se vérifieront théoriquement et pratiquement (27).

Scolie 2. — La ligne droite est une *intuition*, en d'autres termes, elle est vue par l'esprit; ce qui veut dire que c'est l'esprit qui la voit dans les choses et non la vue des choses qui en met la notion dans l'esprit. Aussi la plupart des démonstrations qui vont suivre se fonderont sur l'intuition et ne feront guère que la développer (38, scolie).

Scolie 3. — La droite est une *donnée* au même titre que l'espace, c'est-à-dire que, pour tracer une ligne droite, il faut une ligne droite.

Cette ligne droite, ou plutôt la portion de droite (62, scolie), nécessaire pour tracer une droite, est censée fournie par l'instrument que l'on nomme *règle*. De là vient que la géométrie de la ligne droite peut s'appeler la *géométrie de la règle* (38, scolie).

Lemme. — Toute figure, dès qu'elle est localisée dans l'espace, est en quelque sorte personnifiée par notre esprit, c'est-à-dire que nous lui reconnaissons comme à nous un haut et un bas, une droite et une gauche, un avant et un arrière, et nous appelons *sens contraires* ou *opposés* les directions de haut en bas et de bas en haut, celles de gauche à droite et de droite à gauche, celles d'avant en arrière et d'arrière en avant.

La ligne droite n'est généralement envisagée que comme ayant, soit une gauche et une droite, soit un haut et un bas, suivant la manière dont nous la supposons localisée dans l'étendue par rapport à nous.

58. *Théorème.* — La droite est illimitée dans ses deux sens.

Démonstration. — Car si elle était limitée quelque part, elle

ne serait pas partout semblable à elle-même. En effet, toute partie comprenant sa limite, c'est-à-dire un point de séparation entre un néant de droite et la droite, n'a pas la même forme que toute partie ne la comprenant pas [1].

59. *Théor.* — La droite peut glisser sur elle-même dans toute son étendue.

Dém. — La droite, en tant que destinée à glisser sur elle-même, peut être envisagée comme une seconde droite placée sur une première droite et coïncidant avec celle-ci dans toute son étendue, et cela en vertu de la pénétrabilité indéfinie de l'espace (36, scolie 3). Or, la droite étant partout semblable à elle-même, cette coïncidence aura lieu à chaque instant entre la droite envisagée comme mobile et la droite envisagée comme fixe [2].

60. *Déf.* — On appelle *semi-droite* une figure rectilinéaire limitée par un point, par conséquent d'un seul côté [3].

[1] Voilà déjà un de ces théorèmes, que j'ai qualifiés plus haut comme étant d'apparence puérile, et dont la démonstration — pourtant si simple — ne s'est pas présentée d'elle-même. Il faut bien se pénétrer de ceci que c'est la droite, en tant qu'indéfinie et non encore déterminée, qui est homogène, et que ni la semi droite (60), ni la portion de droite (62), ni la droite interrompue (71) ne le sont, bien qu'on puisse y trouver des parties semblables autant qu'on veut (67). J'aurais pu dire aussi que, si la droite était limitée quelque part, elle devrait l'être partout. Ce serait parfaitement exact, mais de forme peut-être un peu cavalière.

[2] Ce théorème et sa démonstration peuvent se mettre sans inconvénient sous forme de corollaire : *La droite peut glisser sur elle-même dans toute son étendue puisqu'elle est partout semblable à elle-même.*

[3] La semi-droite est une notion nouvelle et pourtant nécessaire si l'on tient à mettre une précision et une rigueur absolues dans les définitions et les démonstrations géométriques. Un *angle* est une figure formée — non par deux droites (deux droites forment huit angles, si l'on tient compte des angles sortants) — mais par deux semi-droites partant d'un même point.

Par parenthèse, on voudra bien remarquer que les propositions sur la semi-droite peuvent se ranger avant ou après les propositions concernant la portion de droite.

La semi-droite peut être posée ou niée (13).

Remarque. — Quand aucune confusion n'est à craindre, on l'appelle souvent droite.

Corollaire. — Un point marqué sur la droite la divise en deux semi-droites symétriques limitées en ce point et illimitées en sens contraires.

Scolie. — La différence des deux semi-droites symétriques tient uniquement à ceci que si l'on place, par exemple, la figure de gauche à droite par rapport au regard, la semi-droite de gauche sera vue ayant son point limite à droite, et celle de droite ayant son point limite à gauche. C'est donc une simple différence d'ordre.

Mais si l'on déplace *le point de vue* de manière, par exemple, à regarder d'en haut au lieu d'en bas, ou de par derrière au lieu de par devant, l'ordre est renversé. Regardée ainsi, la semi-droite de gauche prend l'aspect qu'avait la semi-droite de droite, et inversement. Donc la dénomination des semi-droites symétriques dépend du point de vue d'où on les considère.

61. *Théor.* — Deux semi-droites non symétriques peuvent être considérées comme identiques.

Dém. — Soient (fig. 1) les deux semi-droites AX et BX, indé-

A B X

Fig. 1.

finies toutes deux dans le sens de X [1]; en faisant glisser la seconde sur la première de manière à faire arriver le point B en A, on les fait coïncider dans toute leur étendue (59) [2].

Scolie. — On verra plus loin, quand nous étudierons le plan, que deux semi-droites symétriques deviennent identiques si l'on

[1] Nous désignerons d'ordinaire par les dernières lettres de l'alphabet le côté indéfini des droites.

[2] Ce théorème et sa démonstration peuvent se ramener à un simple corollaire de la définition.

imprime à l'une d'elles un demi-tour, ce qui revient à changer le point de vue [1].

62. *Déf.* — On appelle *portion de droite* une figure rectilinéaire limitée par deux points dans les deux sens.

La portion de droite peut être posée ou niée (13).

Rem. — Le besoin de brièveté fait que souvent aussi, quand aucune confusion n'est à craindre, on se sert du nom de droite au lieu de portion de droite, comme au lieu de semi-droite. Quant à la droite proprement dite, on peut l'appeler droite illimitée ou indéfinie ou même simplement la droite.

63. *Théor.* — Deux portions de droite de même longueur sont égales par identité.

Dém. — Car, par le glissement de l'une d'elles sur la droite, on peut la faire coïncider avec l'autre, et cette opération nous sert à constater leur égalité [2].

Scolie. — Comme une portion de droite est limitée par un point aussi bien à gauche qu'à droite, elle ne change pas d'aspect quand on renverse le point de vue d'où on la considère, à moins qu'on ne retienne par la pensée l'ordre des points limites en leur donnant des dénominations spéciales.

Cor. — Deux portions de droite de même longueur sont égales par identité et par symétrie (41) [3].

64. *Déf.* — Une portion de droite est dite *plus grande* ou *plus petite* qu'une autre si, quand on les superpose de manière à faire coïncider leurs points limites d'un même côté, l'autre point limite

[1] Tel sera le début de la théorie de la symétrie.

[2] Ce théorème et sa démonstration peuvent se mettre sous forme de corollaire dépendant de la définition de la droite. En effet, deux portions de droite ayant même longueur ont même grandeur et même forme, la longueur étant la grandeur de la droite (25).

[3] Cette proposition sur la portion de droite reviendra à propos de l'angle, qui est aussi à lui-même son symétrique.

de la première tombe en dehors ou en dedans de la seconde.

La nouvelle portion de droite délimitée de cette manière par les deux points non coïncidant, fait la *différence de longueur* des deux portions de droite.

Cor. 1. — Les portions de droite sont des quantités de même nature et elles peuvent s'additionner ou se soustraire (axiome V).

Cor. 2. — Une portion de droite quelconque peut se placer partout sur la droite ; par conséquent, la droite ainsi que toute portion de droite, sont des lignes isogènes, c'est-à-dire indéfiniment divisibles d'une infinité de manières en parties égales (44).

Cor. 3. — Si l'on prend l'une quelconque de ces parties pour unité de mesure, la longueur de la droite ainsi divisée sera exprimée par un certain nombre de ces unités.

Cor. 4. — Deux portions de droite quelconques sont comparables sous le rapport de la longueur et peuvent être considérées et traitées comme étant multiples ou sous-multiples l'une de l'autre (axiome VII).

Cor. 5. — Si, sur une même droite, on place bout à bout plusieurs portions de droite, la somme de leurs longueurs est égale à la longueur comprise entre les points extrêmes (axiome IV, cor.).

Cor. 6. — On prolonge indéfiniment la portion de droite dans l'un et l'autre sens en la faisant glisser indéfiniment sur elle-même (59).

Scolie. — C'est sur cette propriété qu'est fondé l'usage de la *règle.* On admet en effet que les arêtes d'une règle sont des portions de droite, et que le trait tracé au moyen d'une règle est une portion de droite.

Ce scolie et le scolie 3 de la proposition 57 contiennent les deux premiers des postulats d'Euclide qui ont rapport à la droite. Le troisième postulat viendra dans le chapitre suivant.

65. *Cor.* 7. — Une droite est déterminée quand on donne une de ses portions.

66. *Cor.* 8. — Quand deux droites ont une portion commune, elles coïncident dans toute leur étendue.

Cor. 9. — Une droite ne se bifurque pas, puisque l'on ne pourrait faire coïncider la partie bifurquée et la partie simple.

67. *Théor.* — Deux portions de droite de longueurs inégales sont semblables.

Dém. — Car par la majoration (ou minoration) de l'une d'elles, on peut la rendre égale à l'autre [1].

Scolie. — Pendant la majoration (ou minoration), les deux points qui limitent la portion de droite glissent sur elle ou sur ses prolongements.

Cor. 1. — En vertu de sa définition, la droite (indéfinie) peut s'engendrer par la majoration indéfinie d'une quelconque de ses portions.

Scolie. — Elle est alors décrite par le mouvement indéfini des deux points qui limitent cette portion, mouvement dont on est censé conserver la trace (16).

Il résulte aussi de là que, par leur mouvement, les deux points engendrent le réceptacle des figures rectilinéaires. Ce qui n'est que naturel, puisque l'espace est réduit à ce seul réceptacle. On retombe ainsi sur la définition de la ligne droite. L'hypothèse qu'elle exprime reçoit par là une première légitimation.

68. *Cor.* 2. — Entre deux points on ne peut tirer qu'une seule portion de droite, ou, par abréviation, qu'une droite (65).

69. *Cor.* 3. — Deux points déterminent une droite (66).

Cor. 4. — Deux droites ne peuvent avoir plus d'un point commun sans coïncider.

[*Cor.* 5. — Deux droites ne peuvent circonscrire un espace] [2].

[1] Même observation qu'au théorème 63 : deux portions de droite ne diffèrent jamais qu'en grandeur, elles sont donc toujours semblables.

[2] Voilà un exemple d'une série de propositions parmi lesquelles on compte trois ou quatre anciens postulats, et sur laquelle, comme je l'ai dit, l'ongle peut glisser sans éprouver aucun arrêt. A cette occasion, je ferai remarquer

70. *Déf.* — On nomme *distance de deux points* la longueur de la portion de droite qui les relie ou pourrait les relier [1].

Scolie. — Dans ce dernier cas, la distance peut être envisagée comme l'aspect vide d'une figure rectilinéaire dont la portion de droite serait l'aspect plein.

Cor. — On détermine la place d'un point sur la droite en donnant sa distance comptée à droite ou à gauche ou bien en haut ou en bas à partir d'un autre point dont la place est censée connue et auquel, pour cette raison, on donne le nom d'*origine.*

71. *Déf.* — On nomme *droite interrompue* une figure rectilinéaire composée d'une succession de portions de droite alternativement posées et niées (13).

Cor. 1. — Une droite interrompue est déterminée quand on donne les longueurs des portions de droite posées et niées ainsi que l'ordre et le sens dans lesquels elles doivent être rangées.

que, dans l'enseignement, ces propositions peuvent être présentées, ainsi qu'on l'a toujours fait, comme des vérités d'intuition.

Une remarque seulement sur le dernier corollaire 5 qui est, chacun le sait, une des demandes d'Euclide. La rédaction, telle qu'elle nous a été transmise, laisse à désirer. Car non seulement deux droites, mais même un nombre quelconque de lignes, droites ou courbes, ne peuvent circonscrire un espace. Au lieu d'espace, il faudrait dire une portion de surface, et même plus exactement encore, une portion de surface plane. Enfin, corrigé de cette façon, le corollaire devrait figurer dans la géométrie du plan. Au surplus, il est, pour nous, rendu inutile par les trois précédents et doit être supprimé.

[1] Ici commence une nouvelle série de propositions, indépendante de celle qui précède. Ces propositions sont neuves; elles ne se lisent dans aucune géométrie que je connaisse. Elles forment la base de la théorie de la similitude. — On remarquera aussi que nous ne parlons pas de la droite chemin minimum; elle ne jouit de cette propriété que dans le plan, ou mieux encore dans l'espace, où elle doit être comparée avec les lignes à double courbure. C'est plus loin seulement que nous établirons cette propriété. Ici, nous n'en avons pas besoin, l'espace étant réduit à la droite. Aussi, à la rigueur, cette définition n'est pas à sa place.

Cor. 2. — Deux droites interrompues sont identiques quand les portions de droite posées et niées dont elles se composent, sont égales chacune à chacune et rangées dans le même ordre et qu'elles se suivent dans le même sens. Elles sont symétriques si ces parties se suivent en sens contraires.

Ainsi sont identiques (fig. 2) les deux droites interrompues ABCD et A′B′C′D′ tracées sur la droite XY et composées de

X A B C D A′ B′ C′ D′ D″ C″ B″ A″ Y

Fig. 2.

AB = A′B′, portions de droite posées, de BC = B′C′, portions de droite niées, et de CD = C′D′, portions de droite posées, AB, BC et CD ainsi que A′B′, B′C′ et C′D′ se suivant dans le même ordre et dans le même sens (dans la figure, de gauche à droite). C'est ce dont on peut d'ailleurs s'assurer encore en faisant glisser ABCD sur la droite XY dans le sens de Y jusqu'à ce que A vienne coïncider avec A′.

Mais les deux droites interrompues ABCD et A″B″C″D″ sont symétriques, parce que les parties dont elles sont composées, bien qu'égales chacune à chacune, à savoir AB à A″B″, BC à B″C″, CD à C″D″, et bien que rangées dans le même ordre, se suivent en sens opposés. Elles prennent le même aspect si l'on renverse pour l'une d'elles le point de vue d'où on la considère, et elles deviennent identiques, comme on le verra plus tard, si l'on fait subir à l'une d'elles un demi-tour.

Scolie. — Les portions de droite AB et A′B′, BC et B′C′, CD et C′D′ sont similaires par identité, tandis que AB et A″B″, BC et B″C″, CD et C″D″ sont similaires par symétrie (41).

72. *Théor.* — Deux droites interrompues sont semblables quand les portions de droite posées et niées dont elles se composent, prises dans l'ordre et le sens où elles se suivent, sont proportionnelles.

Dém. — Soient (fig. 3) les droites interrompues ABCD et A'B'C'D', dont les parties énumérées suivant le même ordre et

X ········ A ———— B   C ——— D ········ A' ——— B'   C' ——— D' ········ Y

Fig. 3.

le même sens sont respectivement AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D', et ont des longueurs telles qu'on ait :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = m,$$

je dis que les deux figures sont semblables.

En effet, si l'on majore, par exemple, la figure A'B'C'D' dans le rapport 1 : m, on rend A'B' = AB, B'C' = BC, C'D' = CD, et par suite la figure A'B'C'D' identique à la figure ABCD. Donc avant la majoration, elle lui était semblable [1].

Scolie 1. — Les portions de droite AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D' sont homologues (42).

Scolie 2. — La forme d'une droite interrompue dépend donc uniquement des rapports de grandeur des portions de droite (tant posées que niées) dont elle se compose [2] et de l'ordre dans lequel elles se rangent.

Observation. — Ici s'arrête la géométrie de la droite en tant

[1] La démonstration paraît longue ; au fond, elle pourrait se réduire à une ligne : *Car la majoration de l'une de ces deux figures la rend identique à l'autre.* Mais telle qu'elle est, elle a cet avantage que, tout le long de la théorie de la similitude, elle pourra prendre la même allure et ne faire pour ainsi dire que se répéter.

Je remarque ici, une fois pour toutes, que cette démonstration repose sur les axiomes algébriques (55), c'est-à-dire que nous considérons et traitons AB et A'B' comme ayant une commune mesure.

[2] Inutile de faire remarquer l'importance de ce théorème, pourtant si simple, pour la théorie générale de la similitude, qui va être bientôt complétée par le théorème sur l'égalité des angles semblables.

que constituant à elle seule tout l'espace. Nous allons passer à la géométrie du plan, en tant aussi qu'il constitue à lui seul tout l'espace. Cette géométrie sera plus compliquée; mais, dans ses grandes lignes, elle se conformera à celle de la droite.

Il va de soi que cette complication tient à ce que le plan a une dimension de plus. Cette dimension en plus a pour effet de faire du plan — de la surface homogène — une condensation d'une infinité de plans distincts bien qu'occupant le même lieu.

En effet, imaginons deux parallèles ou deux droites qui se coupent. Je puis engendrer le plan en faisant glisser sur la première une droite passant par un point fixe de la seconde, et engendrer de même une infinité de plans identiques en prenant tour à tour comme point fixe chaque point de la seconde. A la fin de cette opération, j'aurai superposé une infinité de plans égale à l'infinité de points renfermés dans la seconde droite. Qu'on veuille bien remarquer que dans cette suite infinie de génératrices il n'y a pas deux génératrices identiques ou qui se superposent.

Il s'ensuit qu'un même plan représente une infinité de plans différents [1]. C'est cette particularité qui donne lieu au postulat du plan, postulat dissimulé, comme on sait, dans la célèbre définition qui caractérise le plan comme une surface sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer dans tous les sens [2].

[1] Il est à noter que tous ces plans présentent une fente, une lacune correspondant au moment où la droite mobile, dans son mouvement tournant, devient parallèle à la droite fixe. Et si l'on veut engendrer le plan par le glissement d'une droite sur deux autres qui se coupent ou sont parallèles (*rabot*), on n'engendre d'un seul et même mouvement qu'un semi-plan, tout à fait comme avec la portion droite (*règle*) on ne peut engendrer d'un seul et même mouvement que la semi-droite. Je doute que cette remarque ait jamais été faite.

[2] M. Poincaré a réussi à définir une demi-surface sphérique dite orthogonale de manière à lui donner par rapport aux demi-circonférences, également orthogonales, qu'on peut tracer sur elle une propriété analogue à celle du plan par rapport à ses droites. Mais par quel artifice laborieux, et combien il serait incompréhensible sans la connaissance préalable de la géométrie d'Euclide! (Voir *Revue générale des sciences*, 15 décembre 1891.)

CHAPITRE V. — Le plan et la droite dans le plan.

73. *Déf.* — Le plan, réceptacle des figures planes (12), est une surface homogène, c'est-à-dire dont toutes les parties, quelle qu'en soit l'étendue, sont susceptibles de recevoir des déterminations semblables (37).

Inverse. — Toute surface homogène est un plan.

Réciproque. — Aucune surface non plane n'est homogène.

Dérivée. — Aucune surface non homogène n'est un plan.

Rem. — Au lieu de *plan,* on dit encore *surface plane.*

Scolie 1. — Ces quatre propositions, qui se réduisent à deux (47), font partie des postulats ou hypothèses de la géométrie. Leur légitimité et leur solidité se manifesteront à mesure que les conséquences qu'on en tirera se vérifieront théoriquement et pratiquement (27).

Scolie 2. — Le plan est une *intuition;* en d'autres termes, il est vu par l'esprit; ce qui veut dire que c'est l'esprit qui le voit dans les choses et non la vue des choses qui en met la notion dans l'esprit. Aussi la plupart des démonstrations qui figureront sous cet en-tête, se fonderont sur l'intuition et ne feront guère que la développer (38, scolie).

Scolie 3. — Le plan est une *donnée* au même titre que l'espace, c'est-à-dire que, pour construire un plan, il faut un plan.

Ce plan, nécessaire pour construire un plan, est censé fourni par l'instrument appelé *rabot* (38, scolie).

74. *Théor.* — Le plan est illimité dans tous ses sens.

Dém. — Car, s'il était limité quelque part, il ne serait pas partout semblable à lui-même, par exemple dans les environs de sa limite (voir 58).

Lemme. — En tant que placé par la pensée dans l'étendue dont nous faisons partie, il se présente à nous comme ayant à la fois non seulement une gauche et une droite, un haut et un bas, mais comme ayant encore une face antérieure — celle qui nous fait vis-à-vis — et une face postérieure.

Il y a toutefois à remarquer que pour se donner l'intuition des deux faces d'un plan, l'esprit doit mettre à profit la troisième dimension.

75. *Théor.* — Le plan peut glisser sur lui-même dans toute son étendue.

Dém. — Le plan, en tant que destiné à glisser sur lui-même, peut être envisagé comme un second plan placé sur un premier plan et coïncidant avec celui-ci dans toute son étendue, et cela en vertu de la pénétrabilité indéfinie de l'espace (36, scolie 3). Or, le plan étant partout semblable à lui-même, cette coïncidence aura lieu à chaque instant entre le plan envisagé comme mobile et le plan envisagé comme fixe [1].

76. *Déf.* — Une *portion de plan* est une figure plane limitée par une ou plusieurs lignes dans un, plusieurs ou tous les sens.

La portion de plan peut être posée ou niée (10).

Rem. — A la différence de ce qui se fait pour la droite, on ne donne que rarement le nom de plan à la portion de plan.

Cor. — On étend indéfiniment un plan dans tous ses sens en faisant glisser indéfiniment l'une de ses portions sur cette portion même.

Scolie. — C'est cette propriété qui explique l'usage du rabot. On admet en effet que la face du rabot qui donne passage au tranchant du fer, est une portion de surface plane, et qu'il en est de même de toute surface dressée au moyen du rabot.

77. *Cor.* — Un plan est déterminé quand on donne une de ses portions.

78. *Cor.* — Quand deux plans ont une portion commune, ils coïncident dans toute leur étendue.

Cor. — Un plan ne se bifurque pas, puisque l'on ne pourrait faire coïncider la partie bifurquée et la partie simple.

[1] Cette proposition, ainsi que beaucoup d'autres, peut s'énoncer sans inconvénient comme corollaire de la définition du plan.

79. *Théor.* — Lorsqu'une droite a deux de ses points dans un plan, elle y est tout entière et elle le divise dans toute son étendue.

Dém. — Soit XY (fig. 4) la droite passant par les deux points A et B du plan P, et circonscrivons par la pensée une portion de plan contenant ces deux points. Majorons et minorons la

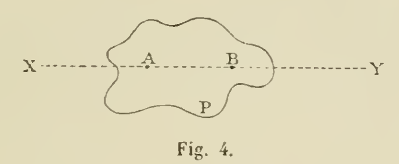


Fig. 4.

figure ainsi formée. Les deux points, tout en décrivant la droite XY (66, cor. 1), ne cesseront pas d'appartenir au plan qui s'étendra avec elle indéfiniment.

N. B. Il ne faut pas oublier que l'espace est réduit au plan, et que, par suite, les deux points ne peuvent sortir du plan.

80. *Cor.* 1. — Une droite prolongée suffisamment, sort de tout espace plan limité qui la renferme.

N. B. A cette proposition, qu'on ne trouve ni démontrée ni énoncée nulle part que je sache, correspond, dans la géométrie à trois dimensions, une proposition analogue, à savoir que le plan partage l'espace dans toute son étendue.

Cor. 2. — Par deux points d'un plan on peut toujours faire passer une droite, et, inversement, par une droite on peut toujours faire passer un plan.

81. *Déf.* — Les deux portions d'un plan divisé par une droite s'appellent *semi-plans*.

Cor. 1. — En tant que divisant le plan dans toute son étendue (79), la droite peut être envisagée sous deux nouveaux aspects suivant qu'on la voit limitant l'un ou l'autre semi-plan [1].

[1] Ce qui donne lieu à un paradoxe, cette droite étant double puisqu'elle appartient tout entière à chacun des semi-plans. De même est double aussi le point qui divise une droite.

82. *Cor.* 2. — Lorsque, dans un plan divisé par une droite, on choisit deux points situés dans l'un et dans l'autre semi-plan, la droite qui les reliera coupera la première, sinon elle resterait dans le même semi-plan.

Cor. 3. — Une droite peut s'appliquer et glisser partout sur un plan, et, par conséquent, toutes les droites tracées sur un même plan sont identiques.

Scolie 1. — De là cette définition vulgaire du plan : une surface sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer dans tous les sens.

Cor. 4. — Par un point d'un plan on peut faire passer une infinité de droites dans ce plan. Ces droites se différencient par leur *position*.

Scolie 2. — On peut considérer la série continue de cette infinité de droites passant par ce point du plan comme la série des traces successives laissées par une seule et même semi-droite tournant autour de ce point pris pour sa limite. Il suit de là que le corollaire précédent pourrait s'énoncer ainsi :

Cor. 4bis. — Une droite peut prendre dans un plan une infinité de positions autour d'un quelconque de ses points. Si l'on suit par la pensée le mouvement de cette semi-droite tournant, par exemple, de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre, autour de son point limite, il vient un moment de sa course où elle se réapplique sur elle-même, en reprenant sa position première. Elle a fait alors ce que l'on nomme un *tour entier*.

Mais dans l'intervalle d'un tour entier, il arrive une position où elle est placée sur son propre prolongement, c'est-à-dire sur l'autre semi-droite de la droite à laquelle elle appartenait dans sa position première.

83. *Déf.* — On appelle *demi-tour* la rotation dans un plan d'une droite autour d'un de ses points par laquelle on amène chacune de ses semi-droites sur la trace de l'autre.

Cor. 1. — Deux semi-droites symétriques deviennent identiques si on les place sur un plan, puisque par le demi-tour de l'une d'elles autour du point qui la limite on peut la superposer à l'autre (61).

Cor. 2. — De la même manière, deux droites interrompues symétriques deviennent identiques par le demi-tour de l'une d'elles autour d'un quelconque de ses points (71).

84. *Cor.* 3. — Le demi-tour d'une figure rectilinéaire a pour effet d'en disposer les parties en sens opposé et de la convertir en sa symétrique.

Cor. 4. — Les figures rectilinéaires symétriques en tant que placées sur un plan sont identiques ; elles ont donc même forme et même grandeur [1].

85. *Théor.* — Deux semi-plans d'un même plan sont à la fois symétriques et identiques.

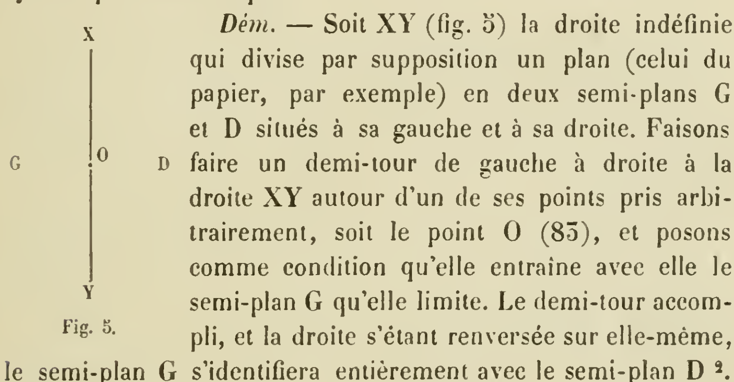


Fig. 5.

Dém. — Soit XY (fig. 5) la droite indéfinie qui divise par supposition un plan (celui du papier, par exemple) en deux semi-plans G et D situés à sa gauche et à sa droite. Faisons faire un demi-tour de gauche à droite à la droite XY autour d'un de ses points pris arbitrairement, soit le point O (83), et posons comme condition qu'elle entraîne avec elle le semi-plan G qu'elle limite. Le demi-tour accompli, et la droite s'étant renversée sur elle-même, le semi-plan G s'identifiera entièrement avec le semi-plan D [2].

86. *Théor.* — Un plan est déterminé quand on donne trois de ses points non en ligne droite.

[1] Voilà encore une série de propositions d'apparence puérile. Elles sont pourtant indispensables pour une théorie rigoureuse de la symétrie et de la légitimité du rabattement, dont on fait un usage constant dans la géométrie plane. Remarquons que la symétrie des figures rectilinéaires ne se résout en identité que dans et par le plan, c'est-à-dire à l'aide de la seconde dimension.

[2] A la condition, bien entendue, que les deux semi-plans restent indéterminés. On remarquera que nous n'avons pas encore identifié les deux semi-plans par rabattement. Le rabattement transpose les faces du plan, ce que ne fait pas le demi-tour. Il suppose l'existence de la troisième dimension.

Dém. — En effet, en joignant ces points deux à deux par des droites, on détermine une portion de plan et par suite le plan.

Cor. 1. — Un plan est encore déterminé quand on donne une de ses droites et un de ses points pris en dehors d'elle.

N. B. Ne pas perdre de vue que jusqu'à présent il n'y a pas d'autre espace que le plan : la troisième dimension est censée ne pas exister. C'est plus tard seulement qu'il sera démontré que deux plans se coupent suivant une droite, et par conséquent, qu'on peut faire passer par une droite une infinité de plans dont un seul passera par le point donné.

Cor. 2. — Si par ce point on fait passer une droite qui tourne d'un mouvement continu, tout en restant appuyée sur la droite du plan, la droite mobile n'aura pas cessé d'être dans le plan, et la surface ainsi engendrée se confondra avec le plan [1].

Maintenant on engendrerait une surface analogue, c'est-à-dire se confondant aussi avec le plan, en prenant pour point fixe un point quelconque de la droite mobile, et pour droite fixe une position quelconque de cette même droite mobile ne passant pas par ce point.

Il en résulte que le plan peut être considéré comme une superposition d'un nombre infini de surfaces engendrées par la rotation d'une droite autour d'un quelconque de ses points et s'appuyant sur une quelconque de ses droites.

Cor. 3. — Par une droite et un point on peut faire passer un plan et l'on n'en peut faire passer qu'un seul.

Cor. 4. — Par trois points non en ligne droite on peut faire passer un plan et on n'en peut faire passer qu'un seul.

Cor. 5. — De même par deux droites qui ont un point commun, puisqu'on peut y prendre trois points non en ligne droite [2].

[1] La théorie des parallèles nous apprend qu'il y a une position où la droite mobile ne s'appuie plus sur la droite fixe; mais le corollaire, tel qu'il est énoncé, est inattaquable.

[2] On s'étonnera peut-être de ces longs détours pour démontrer des propositions que les géométries ordinaires mentionnent en courant. Rien ne paraît plus simple en effet que de faire passer, par exemple, un plan par l'une des droites et de le faire tourner jusqu'à ce qu'il rencontre l'autre. Mais en cela on userait de la troisième dimension sans y être autorisé.

87. *Déf.* — On appelle *figure plane* toute figure tracée sur un plan.

88. *Déf.* — On appelle *figure rectiligne* ou *polygonale* une figure plane composée de lignes droites, semi-droites ou portions de droites.

Les figures rectilignes sont des *digones*, des *trigones* ou des *polygones*, suivant qu'elles sont formées à l'aide de deux, de trois ou de plusieurs lignes droites.

Les digones sont les plus simples des figures rectilignes. Les trigones renferment les plus simples des polygones.

Cor. — Les figures planes peuvent se tracer et se déplacer partout sur le plan (81, cor. 3).

89. *Déf.* — On appelle *géométrie plane*, ou encore *géométrie à deux dimensions*, la partie de la science géométrique qui s'occupe des figures planes.

CHAPITRE VI. — Les digones.

90. *Déf.* — On nomme *direction* d'une droite dans un plan la position de cette droite autour d'un de ses points dans le plan (81, cor. 4 et 4bis).

Scolie. — Ce point partage la droite en deux semi-droites symétriques et dirigées en sens contraires par rapport à lui (60). Il suit de là que la même droite peut être parcourue de deux façons opposées et qu'ainsi elle a deux directions. Il n'en va pas ainsi avec la semi-droite dont la direction se compte naturellement à partir de son point limite. Nous dirons donc plus spécialement :

91. *Déf.* — On nomme *direction* d'une semi-droite dans un plan, la position de cette semi-droite par rapport à son point limite dans ce plan.

Scolie. — Tout point de la semi-droite peut être pris arbitrairement pour point limite (61).

92. *Déf.* — Si à une semi-droite d'un plan on fait prendre dans ce plan toutes les positions possibles autour de son point limite ou, ce qui revient au même, si l'on fait passer par ce point dans le plan toutes les semi-droites possibles (82, cor. 4 et 4bis) la figure ainsi formée se nomme *rose des directions*, et le point commun en est le *pôle*.

Cor. 1. — Deux roses des directions dans le même plan sont identiques et elles coïncident si on fait coïncider leurs pôles.

Cor. 2. — Deux roses des directions dans le même plan ont toujours une droite commune, celle qui joint leurs pôles.

93. *Déf.* — Dans toute rose des directions on appelle *norme* la semi-droite arbitraire à la direction de laquelle, censée connue, on peut rapporter toutes les autres directions (comp. 70, cor.).

Cor. — Étant données deux roses des directions, si l'on prend pour norme commune la ligne des pôles, à toute direction dans l'une correspondra une direction dans l'autre (92, cor. 1 et 2).

Scolie. — Il va de soi que les deux pôles sont censés appartenir à la même semi-droite et non à deux semi-droites différentes dirigées en sens contraires (91).

94. *Déf.* — On appelle *angle* la figure formée par deux semi-droites partant d'un même point [1].

Les deux semi-droites sont les *côtés* de l'angle et le point dont elles partent en est le *sommet*.

[1] « La considération de deux droites AB et AC qui se rencontrent, conduit à une idée nouvelle, qui est celle d'*inclinaison* mutuelle ou d'*angle*, et qui, comme l'idée de longueur, ne saurait être définie, c'est-à-dire ramenée à une idée plus simple; ce qu'on définit, c'est l'égalité et l'addition des angles. » (Rouché-Comberoussé, 8.) — Par parenthèse, à quelle idée plus simple pourrait-on ramener celle de cercle, ou de parabole ou de chaînette? Cf. : la ligne droite est la plus simple de toutes les lignes (v. note p. 38).

Rem. 1. — Par abréviation, on dit presque toujours *droites* et non semi-droites pour désigner les côtés de l'angle.

Cet abus n'est pas sans avoir des inconvénients (voir p. 40, note 3).

Rem. 2. — Un angle se désigne d'ordinaire par trois lettres, et l'on a soin de mettre celle du sommet au milieu.

Quelquefois, quand il n'y a pas de confusion possible, on le désigne par la lettre du sommet.

Quelquefois encore, par une lettre, ordinairement minuscule ou tirée de l'alphabet grec, ou par tout autre signe inscrit dans son ouverture.

On dit l'angle BAC ou CAB, B'A'C' ou C'A'B' (fig. 6 et 6[bis]), ou bien l'angle A ou A', ou bien encore l'angle α ou *a* ou 1, suivant l'espèce de signe inscrit.

Scolie 1 et *déf.* — Tout angle présente deux aspects, l'aspect plein et l'aspect vide, suivant que l'on regarde comme posée ou comme niée l'étendue plane renfermée entre ses côtés (10). Dans le premier cas, l'angle est dit *sortant;* dans le second cas, *rentrant* [1].

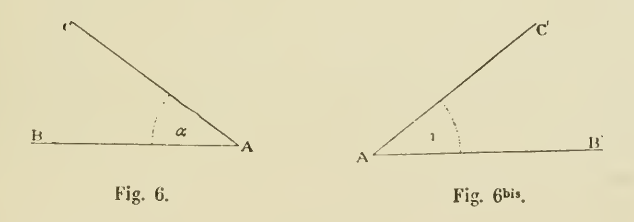


Fig. 6.

Fig. 6[bis].

Sauf indication contraire, l'angle est toujours envisagé sous son aspect plein, autrement dit, comme angle sortant.

[1] Ce n'est pas la définition ordinaire de l'angle rentrant, laquelle, dans les polygones, s'applique aux angles intérieurs plus grands que la somme de deux droits. Il est cependant bien plus naturel, et aussi plus commode, d'appeler ainsi l'angle extérieur, correspondant à cet angle intérieur et formé par les mêmes côtés, lequel pénètre, *entre* dans le polygone, et vient en *échancrer,* pour ainsi dire, la surface.

Scolie 2. — Lorsque les deux semi-droites appartiennent à la même droite, il n'y a, à proprement parler, plus d'angle, mais on convient, en certains cas, d'y voir encore un angle. De même, par extension, on voit parfois un angle dans la figure formée par deux semi-droites coïncidentes.

Cor. 1. — L'angle que toute semi-droite d'une rose des directions fait avec la norme, détermine sa direction et par là même sa position, et chaque semi-droite a ainsi sa direction ou sa position déterminée et propre qui la différencie de toute autre semi-droite de la même rose (comparer 81, cor. 4 et 4bis).

Lemme. — Si l'on place le sommet d'un angle sur le pôle d'une rose des directions, les côtés y prendront, par rapport à la norme, chacun une direction déterminée et différente.

95. *Déf.* — On appelle *valeur* de *l'angle* et souvent par abréviation *angle*, la différence des directions de ses côtés.

Cor. — Si l'un des côtés est pris pour norme, cette valeur est donnée par la direction de l'autre côté.

Rem. — Ne pas prendre le mot *différence* dans son sens arithmétique ou algébrique, mais dans le sens vulgaire, comme quand on dit de deux droites qu'elles sont différentes. Les côtés de l'angle, en ce sens, sont donc différents.

Scolie. — Une rose des directions peut être engendrée en faisant tourner la semi-droite génératrice de gauche à droite, c'est-à-dire suivant le sens de marche des aiguilles d'une montre, ou de droite à gauche.

Il en est de même de l'angle, en tant qu'on l'engendre en faisant tourner un de ses côtés de manière à le faire passer de sa position première, prise pour norme, à la position occupée par l'autre côté.

Le même angle peut donc être désigné de deux manières : on peut tout aussi bien dire l'angle CAB (fig. 6) que l'angle BAC, suivant que l'on prend pour norme AC ou AB (94).

96. *Déf.* — Quand il est nécessaire de faire la distinction, on convient de dire que l'angle évalué de gauche à droite est *positif* ou de *signe positif*, et que l'angle évalué de droite à gauche

est *négatif* ou de *signe négatif*. C'est pourquoi l'on dit de deux angles évalués en sens opposés *qu'ils n'ont pas le même signe.*

Rem. — Il ne faut donc pas confondre le *signe* avec l'*aspect*. Les deux aspects d'un même angle BAC n'ont pas même valeur. En les évaluant tous deux dans le même sens, soit de gauche à droite, l'aspect *plein* nous donne la partie de surface plane comprise entre les côtés AB et AC et engendrée par le mouvement de AB vers AC dans le sens de la marche des aiguilles d'une montre. L'aspect *vide*, au contraire, nous présente la même surface, mais en tant qu'elle reste en dehors des côtés et n'est pas engendrée quand on fait tourner AC vers AB toujours dans ce même sens de gauche à droite.

Comme on l'a déjà dit (94, scol. 1), on ne considère presque jamais les angles sous leur aspect vide, excepté dans des cas tout spéciaux.

N. B. Sauf avis contraire, les angles seront toujours évalués positivement, c'est-à-dire qu'on prendra toujours pour norme la position première du côté qui, marchant dans le sens des aiguilles d'une montre, se rapproche de l'autre. Ainsi, dans la figure 6, la norme sera AB ; dans la figure 6bis, elle sera A'C'.

97. *Déf.* — Deux angles sont dits *égaux* si, lorsque l'on fait coïncider leurs côtés normes, leurs deux autres côtés coïncident.

Cor. 1. — Les angles égaux ont même valeur, et inversement.

Cor. 2. — Comme le même angle peut être évalué positivement et négativement, il est à lui-même son symétrique.

98. *Cor.* 3. — Les angles de même valeur sont égaux par identité et par symétrie (41)[1].

99. *Déf.* — Un angle est dit *plus grand* ou *plus petit* qu'un autre angle si, quand on fait coïncider les côtés normes, son second côté tombe en dehors ou en dedans de cet autre angle.

[1] Cette proposition est fondamentale pour la théorie de la symétrie. Dans les figures symétriques, les angles symétriques sont égaux mais de signes contraires.

La valeur de l'angle formé de cette manière par les deux côtés non coïncidant, fait la différence de valeur des deux angles.

Cor. 1. — Les angles sont ainsi des quantités de même nature, ils peuvent s'additionner et se soustraire, et par suite être multipliés et divisés.

Cor. 2. — Un angle quelconque peut se placer indifféremment partout sur une rose des directions. Par conséquent une rose des directions, de même qu'un angle quelconque, sont des surfaces isogènes, c'est-à-dire indéfiniment divisibles d'une infinité de manières en parties égales (**44**).

Cor. 3. — Deux angles quelconques peuvent être considérés comme étant multiples ou sous-multiples l'un de l'autre.

Cor. 4. — Si sur un plan on place deux angles à la suite l'un de l'autre, de manière à leur donner même sommet et un côté commun [1], leur somme (ou la somme de leurs valeurs) est égale à l'angle (ou à la valeur de l'angle) formé par les côtés non communs.

De là, si sur un même plan on place plusieurs angles à la suite l'un de l'autre, de manière à leur donner même sommet et deux par deux un côté commun, la somme de ces angles est égale à l'angle formé par les côtés non communs [2].

Cor. 5. — Si sur un même plan on place deux angles de manière à leur donner même sommet et un côté commun qui sert de norme à tous deux ou ne sert de norme ni à l'un ni à l'autre, leur différence est égale à l'angle formé par les côtés non communs.

100. *Théor.* — La différence des directions des deux semi-droites d'une même droite est la même pour toutes les droites.

Dém. — En effet toutes les droites sont identiques.

[1] Ce côté commun sert de norme à l'un, mais non à l'autre (96, rem. et N. B.).

[2] Toute cette théorie de l'addition ou de la multiplication des angles est absolument neuve, du moins je le crois. Elle est capitale. On voudra bien remarquer que tous ces corollaires ne sont que des développements raisonnés de la définition.

101. *Déf.* — On appelle *angle droit* l'angle qui a pour valeur la moitié de cette différence.

Ainsi les angles AOP et POB (fig. 7) sont droits.

Les côtés de l'angle droit sont dits *perpendiculaires* l'un à l'autre, et le point où une droite en rencontre une autre perpendiculairement, s'appelle le *pied* de la perpendiculaire.

Cor. 1. — Tous les angles droits, ayant même valeur, sont égaux.

Cor. 2. — Toutes les perpendiculaires à une même droite ont même direction.

Cor. 3. — Par un point d'une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite.

Cor. 4. — Par un point extérieur à une droite, on ne peut abaisser plus d'une perpendiculaire à cette droite. Car deux droites partant d'un même point ne peuvent avoir même direction (cor. 2).

102. *Déf.* — Quand deux droites font entre elles un angle différent d'un angle droit, elles sont dites *obliques* par rapport l'une à l'autre.

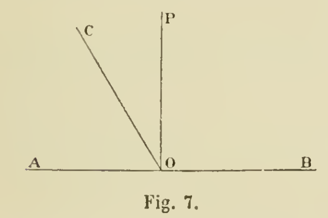


Fig. 7.

Si l'angle qu'elles font est plus grand qu'un angle droit, il est dit *obtus;* s'il est plus petit, il est dit *aigu.* Ainsi l'angle COB (fig. 7) est obtus; l'angle AOC est aigu.

Scolie. — L'angle formé par les deux semi-droites d'une même droite équivaut à deux angles droits ; c'est le plus grand des angles obtus.

L'angle formé par deux semi-droites qui coïncident, est un angle *nul;* c'est le plus petit des angles aigus.

Rem. — Il n'est pas dans l'habitude de parler d'angles plus grands que la somme de deux droits et qui, par conséquent, correspondent à des angles que nous avons appelés *rentrants* (94, scolie 1).

Sauf indication contraire, les angles sont toujours envisagés

comme sortants. Ainsi l'angle BAC (fig. 6) désignera cette partie de la surface plane qui s'étend vers la gauche, et non celle qui l'entoure et s'étend principalement vers la droite.

103. *Déf.* — Deux angles dont la somme est égale à un angle droit, sont dits *complémentaires* et l'un est le *complément* de l'autre.

Deux angles dont la somme est égale à deux angles droits, sont dits *supplémentaires* et l'un est le *supplément* de l'autre.

Ainsi dans la figure 7, en supposant que PO soit perpendiculaire sur la droite AB, les deux angles AOC et COP sont complémentaires; mais les deux angles AOC et COP sont supplémentaires.

Cor. 1. — Deux angles supplémentaires sont toujours l'un aigu, l'autre obtus, à moins qu'ils ne soient droits tous les deux; deux angles complémentaires sont toujours aigus.

Cor. 2. — Lorsque deux angles complémentaires ont un côté commun et le même sommet, les côtés non communs sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Cor. 3. — Lorsque deux angles supplémentaires ont un côté commun et le même sommet, les côtés non communs sont en ligne droite.

Scolie. — Les angles supplémentaires ne sont pas égaux, bien qu'ils aient un côté commun et les deux autres côtés sur une même droite, parce que ces deux-ci sont dirigés en sens contraires et, par suite, n'ont pas même direction [1].

104. *Théor.* et *déf.* — Lorsqu'une droite en rencontre une autre, son prolongement passe à l'autre côté de celle-ci, autrement dit, elle la *coupe*.

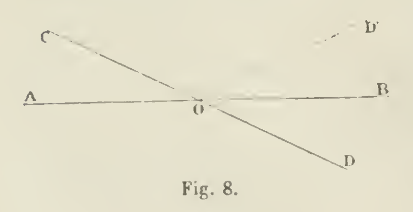


Fig. 8.

Dém. — Soit la droite AB (fig. 8) rencontrée en O par

[1] Bon nombre de ces corollaires figurent sous le nom de théorèmes dans les géométries usuelles, et les autres devraient y figurer.

la droite CO. Je dis que le prolongement de CO passera en dessous de AB en prenant la position OD, et ne restera pas au-dessus en prenant, par exemple, une position telle que OD′; en d'autres termes, la droite CO coupera la droite AB. Car l'angle COD, qui vaut deux droits (102, scol. 1), est égal à l'angle AOB qui vaut aussi deux droits. Le prolongement OD ne peut donc pas être en OD′ puisque l'angle COD′, qui devrait être égal à l'angle AOB, est plus petit que l'angle COB, lui-même plus petit que l'angle AOB de tout l'angle AOC. Il est donc bien en OD et fait avec OB un angle BOD égal à l'angle AOC. On démontrerait de la même façon que l'angle COB est égal à l'angle DOA.

Cor. 1. — Quand deux droites ont un point commun, elles se coupent.

103. *Cor.* 2. — Lorsque deux droites se coupent, elles forment quatre angles. De ces quatre angles, ceux qui n'ont pas de côté commun ou encore qui ont leurs côtés dirigés tous deux en sens contraires, autrement dit, les angles *opposés par le sommet*, sont égaux (voir note p. 40).

Cor. 3. — Si l'un des quatre angles ainsi formés est droit, les trois autres aussi sont droits.

Cor. 4. — La somme des angles que l'on peut former autour d'un point dans un plan, équivaut à quatre angles droits.

Scolie 1. — L'aspect vide et l'aspect plein d'un même angle ainsi que l'angle rentrant et l'angle sortant font aussi quatre droits (102).

Scolie 2. — L'angle droit, ainsi que ses multiples et sous-multiples déterminés, étant des quantités constantes, on les a pris comme unités de mesure pour évaluer les angles [1].

Mais à la mesure directe des angles au moyen d'un angle

[1] A la rigueur, ce qui suit ne devrait venir que dans l'étude du cercle; car c'est une propriété de la circonférence de mesurer les angles. Si j'étudie ici cette propriété, c'est parce qu'il n'entre pas dans mon plan de m'occuper du cercle.

unité, c'est-à-dire d'une portion de surface plane au moyen d'une autre portion de surface plane prise comme unité, on a substitué la mesure plus commode d'une espèce de ligne qui se comporte comme l'angle et croît avec lui, à savoir la mesure des *arcs de circonférence.*

106. *Déf.* — Si dans une rose des directions, on prend sur chaque droite, à partir du pôle, la même longueur, la figure ainsi limitée s'appelle *cercle*; la limite, *circonférence;* et le pôle prend le nom de *centre.*

Les droites de même longueur qui vont du centre à la circonférence, portent le nom de *rayons*, et celles qui, passant par le centre, sont limitées de part et d'autre par la circonférence et se composent par conséquent de deux rayons dirigés en sens contraires, portent le nom de *diamètres.*

Enfin, la portion de cercle limitée par deux rayons s'appelle *secteur circulaire* ou plus simplement *secteur*, et la portion de circonférence limitée par les extrémités de ces mêmes rayons, *arc de circonférence* ou simplement *arc.*

La circonférence ainsi que les arcs sont des *lignes courbes.* On entend par *ligne courbe* une ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, et qui, par conséquent, n'est homogène dans aucune de ses parties.

Scolie. — Comme tous les rayons sont égaux, on définit ordinairement la circonférence une ligne dont les points sont à égale distance d'un point fixe (nommé centre). La circonférence se trace au moyen de l'instrument appelé *compas* [1]. L'une de ses pointes reste fixe et marque le centre; l'autre, arrêtée à une

[1] Puisque j'ai défini la règle et le rabot (62, scol., et 76, scol.), voici la définition du compas : Le compas est un instrument se composant essentiellement de deux *branches rigides,* appelées aussi *jambes,* mobiles autour d'une charnière et terminées en pointes. On admet que, appuyées sur un plan, ces pointes y marquent des points, et que la distance qu'on a mise entre elles, se conserve tant qu'on le juge nécessaire; de sorte que, si le compas pivote autour de l'une d'elles, supposée fixe, l'autre décrit une circonférence.

distance déterminée de la première, distance qui est le rayon, décrit par son mouvement la circonférence.

La géométrie plane s'appelle souvent *géométrie de la règle et du compas.* On serait plus exact en disant *de la règle,* DU RABOT *et du compas.*

Le plan étant construit par le rabot, la règle permet de tracer une ligne droite d'un point à un autre, et le compas, de transporter partout sur un plan une portion de droite tracée; par conséquent, il permet de comparer des portions de droite sous le rapport de la longueur, et de voir si elles sont égales ou inégales, en les posant l'une sur l'autre. (Voir 99, note.)

Cor. 1. — Ainsi que la rose des directions et l'angle, dont ils dérivent, le cercle et le secteur circulaire, la circonférence et l'arc sont des figures isogènes.

Cor. 2. — Les secteurs égaux sont limités par des arcs égaux.

107. *Cor.* 3. — Sur un même cercle, les angles égaux couvrent des secteurs circulaires égaux, et par conséquent interceptent entre leurs côtés sur la circonférence des arcs égaux.

Cor. 4. — Les multiples et les sous-multiples d'un angle donné interceptent sur la circonférence les mêmes multiples et sous-multiples de l'arc correspondant.

Cor. 5. — A la comparaison et par conséquent à la mesure des angles, on peut substituer la comparaison et la mesure des arcs, l'arc unité correspondant à l'angle unité.

Cette proposition, sous une forme concise, s'énonce de la manière suivante :

108. Un angle a même mesure que l'arc compris entre ses côtés; ou, plus brièvement encore :

Un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.

Cor. 6. — D'un même centre et avec le même rayon, on ne peut tracer qu'une seule et même circonférence.

Cor. 7. — Deux circonférences de même rayon sont égales et elles coïncident si l'on fait coïncider leurs centres.

109. *Théor.* — Deux circonférences de rayons inégaux sont semblables.

Dém. — Car il suffit de majorer le rayon de l'une de manière à le faire égal au rayon de l'autre pour les rendre identiques (106, cor. 7). Elles ne diffèrent donc qu'en grandeur et par conséquent elles sont semblables (42).

Cor. 1. — Deux secteurs circulaires sont semblables quand ils comprennent le même angle.

Cor. 2. — Deux arcs de circonférence sont semblables quand ils mesurent le même angle.

110. *Cor.* 3. — La majoration ne modifie pas la valeur d'un angle ; par conséquent les angles égaux sont semblables et les angles semblables sont égaux.

N. B. Ne pas oublier que les angles sont égaux par identité et par symétrie.

Scolie 1. — Ce corollaire est de la plus grande importance. Il s'ensuit que, dans les figures semblables, les éléments angulaires sont égaux, c'est-à-dire que tous les angles qu'elles comportent sont égaux chacun à chacun. Les éléments linéaires seuls diffèrent en grandeur [1].

Scolie 2. — Si l'on fait coïncider les centres de deux cercles de rayons inégaux, il suffit de majorer le plus petit ou de minorer le plus grand pour faire coïncider les deux circonférences. Pendant cette opération, le centre ne change pas de place.

111. *Déf.* — On appelle *centre de majoration* d'une figure le point du plan de la figure qui reste à sa place pendant la majoration.

Rem. — Ici finit la parenthèse sur la circonférence. On voit

[1] Ce corollaire sera particularisé par la suite, non pas que la chose soit indispensable pour la rigueur des déductions, mais parce que je ne voudrais pas que l'on pût dire que je passe subrepticement sur les difficultés. Si donc je reviens plusieurs fois sur ce corollaire, c'est pour aller au-devant de tous les scrupules. Je sens si bien que le lecteur défiant doit penser que le raisonnement a fait quelque part un saut dont il ne s'est pas aperçu.

sans peine qu'elle n'est pas indispensable, et qu'on pourrait la mettre à sa place naturelle.

112. *Déf.* — On appelle *coin* la figure formée par deux portions de droites qui partent d'un même point, et qu'on nomme les *côtés* du coin.

Les deux autres points limites se nomment *extrémités libres* [1].

On nomme coin *isocèle* celui dont les côtés sont égaux, coin *scalène* celui dont les côtés sont inégaux.

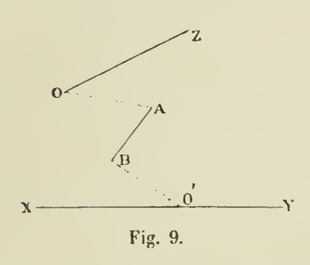


Fig. 9.

Scolie 1. — Le coin ne diffère de l'angle qu'en ce que les côtés de celui-ci sont illimités en un sens.

Scolie 2. — Les angles et les coins servent à définir une figure rectiligne plane quelconque. Soit par exemple la figure 9, composée d'une semi-droite OZ, dont le point limite est O, d'une portion de droite AB, et d'une droite indéfinie XY.

Divisons celle-ci en deux semi-droites par un point arbitraire O', et joignons OA et O'B.

La figure OABO' se compose de deux coins BAO et ABO', ayant en commun le côté AB, et elle sera définie quand on aura donné les côtés OA, AB et BO' ainsi que les angles compris BAO et ABO'. La direction de la semi-droite OZ sera donnée par l'angle ZOA, et celle de la droite XY par l'angle BO'Y.

Lemme 1. — Un coin est déterminé quand on donne les longueurs des côtés, leur ordre et l'angle compris.

Cor. 1. — Deux coins sont identiques quand ils ont des côtés égaux chacun à chacun, comprenant le même angle et se suivant dans le même ordre. Ils sont symétriques si, les deux premières conditions étant remplies, ils se suivent dans un ordre contraire.

Cor. 2. — Les coins isocèles identiques sont à la fois symé-

[1] Nouvelle espèce de figure, à laquelle, je crois, aucun géomètre n'a pensé. On va voir combien son introduction dans la géométrie rend simple, facile et claire la théorie de la similitude des polygones.

triques; en d'autres termes, un coin isocèle est symétrique à lui-même.

Lemme 2. — On a vu (83 et 84) comment deux figures rectilinéaires égales par symétrie, deviennent égales par identité, lorsque, placées sur un plan, on imprime à l'une d'elles un demi-tour.

Mais nous avons vu également que cette identité des figures symétriques se montre aux yeux avant le demi-tour, rien qu'en changeant le point de vue, par exemple, en regardant d'en haut la figure que l'on regardait d'en bas. Au fond, dans ce changement de point de vue, c'est le spectateur qui fait le demi-tour.

113. *Théor.* — Un coin scalène tracé sur un plan se montre dans sa forme symétrique si on le regarde de l'autre côté du plan (ou, ce qui revient au même, si l'on *rabat* le plan autour d'une de ses droites de manière à lui faire présenter son autre face [1]).

Dém. — Supposons que le coin scalène tracé sur le plan ait son grand côté à la gauche, son petit côté à la droite du spectateur ; si celui-ci se place devant l'autre face du plan supposé transparent, il verra le grand côté du coin à sa droite, et le petit côté à sa gauche. La même figure se présentera donc comme étant sa symétrique et superposée à elle-même.

Cor. 1. — Les coins scalènes symétriques deviennent identiques par rabattement.

114. *Cor.* 2. — Deux figures rectilignes planes symétriques deviennent identiques par rabattement (112, lemme 2).

Lemme. — L'infinité des figures rectilignes planes possibles peut se ramener à trois types : la *ligne polygonale* ou *ligne brisée*, la *figure étoilée* et la *figure lacunaire.*

La ligne polygonale se compose de portions de droites; les figures étoilées ou lacunaires peuvent comprendre en outre des droites ou semi-droites.

[1] Voir au chapitre suivant la théorie du rabattement qui, rigoureusement parlant, n'appartient pas à la géométrie plane.

115. *Déf.* — On appelle *ligne polygonale* ou *ligne brisée*, une figure composée de portions de droites, soit toutes pleines, soit en partie pleines et en partie vides, se joignant deux à deux par leurs extrémités.

La ligne est *fermée* si toutes les portions de droites sont pleines. En ce cas, il n'y a pas d'extrémités libres (112). La ligne brisée fermée porte spécialement le nom de *polygone.*

Elle est *ouverte* si elle comprend une portion de droite vide. En ce cas, il y a deux extrémités libres.

Dans l'un et l'autre de ces cas, elle est *continue.*

Enfin, elle est *discontinue* s'il y a plus d'une portion vide. Dans ce cas, il y a des extrémités libres en nombre pair plus grand que deux.

La figure 10, ABCDE, est une ligne brisée fermée.

La figure 11, A′B′C′D′E′, est une ligne brisée ouverte. Entre les points A′ et E′, il y a une distance, en d'autres termes une

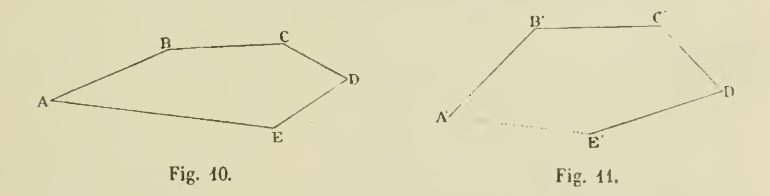


Fig. 10.

Fig. 11.

portion de droite vide; mais, comme la figure précédente, elle est continue.

La figure 12, A″B″C″D″E″, est discontinue, et elle présente autant de fois deux extrémités libres qu'il y a de portions de droites vides.

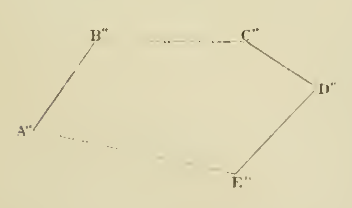


Fig. 12.

Cor. 1. — Une ligne polygonale fermée se compose d'un nombre de coins égal à celui des portions de droites qui la composent. Ces coins ont deux à deux un côté commun.

Une ligne brisée ouverte se compose d'un nombre de coins

égal à celui des portions de droites dont elle se compose, diminué d'une unité.

Une pareille ligne est définie quand on définit ses coins et l'ordre dans lequel ils se rangent.

Il suit de là que pour définir la ligne polygonale fermée, on peut se dispenser de définir deux coins consécutifs quelconques.

Enfin une ligne polygonale discontinue sera supposée complétée par le tracé de toutes ses distances sauf une, et elle rentrera ainsi dans les lignes continues ouvertes.

N. B. Une ligne polygonale ouverte ou discontinue peut renfermer des droites ou des semi-droites. Elle rentre alors dans les figures lacunaires (fig. 14).

116. *Déf.* — On appelle *ligne étoilée* une figure composée de portions de droites ou de semi-droites partant d'un même point.

Une ligne étoilée se compose ainsi de coins ou d'angles ayant le même sommet. Telle est la figure OABCDEX (fig. 13).



Fig. 13.

Scolie. — Un ou plusieurs angles peuvent être nuls (102, scol.).

La droite OX peut être considérée comme double et renfermant un angle nul.

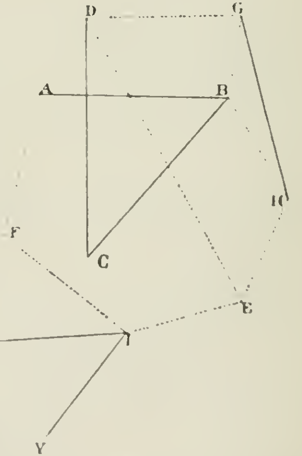


Fig. 14.

Une figure étoilée se définit en définissant ses coins ou ses angles et en donnant leur ordre. On peut se dispenser de définir un quelconque des angles.

Déf. — On appelle *figure lacunaire* toute figure rectiligne composée de droites, semi-droites ou portions de droites disposées sans ordre.

Toute figure lacunaire, si compliquée qu'elle soit, telle est la figure 14, ABCDEFGHIXY, formée de lignes pleines finies ou

indéfinies, pourra toujours se ramener à des lignes polygonales ouvertes ou fermées, par exemple, DEGH, ABCF, et à des figures étoilées, telles que BCAGH et IEFXY, où l'on a introduit des distances, marquées par des pointillés.

117. *Théor.* — Deux coins sont semblables quand leurs côtés, renfermant le même angle, sont respectivement proportionnels et disposés dans le même ordre.

Dém. — Soient deux coins AOB et A'O'B' (fig. 15) renfermant le même angle entre leurs côtés respectifs, et ceux-ci satisfaisant à la proportion $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'} = m$, en même temps que O'A' est disposé par rapport à O'B' comme OA l'est par rapport à OB. En majorant convenablement l'une des deux figures, soit A'O'B' du point O' comme centre (111) dans le rapport m, O'A' et O'B' deviendront égaux à OA et OB (110). Le coin A'O'B' sera alors égal au coin AOB. Il n'en différait donc qu'en grandeur, et partant lui était semblable (42).

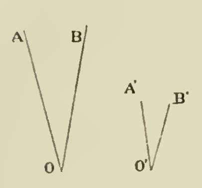


Fig. 15.

Scolie. — Les côtés OA et O'A' ainsi que OB et O'B' devenant similaires (41) à la suite de la majoration, sont des côtés homologues (42).

Cor. — Des lignes polygonales ainsi que des figures étoilées ou lacunaires sont semblables quand elles se composent de coins semblables ou d'angles égaux disposés similairement [1].

118. *Déf.* — On nomme *parallèles* des droites (semi-droites ou portions de droites) ayant même direction.

[1] A première vue, cette proposition si générale, tellement générale qu'elle n'est énoncée dans ces termes dans aucune géométrie, cette proposition, dis-je, épuise entièrement la théorie de la similitude des figures planes rectilignes, puisque les cas de similitude des triangles n'en sont que des applications particulières, et qu'ainsi la théorie des parallèles n'en sera qu'un corollaire. Il nous conviendra, vu le but que nous avons en vue, de ne pas en faire état. Mais d'autre part, on voudra bien remarquer que ce théorème a été établi indépendamment des propositions sur les parallèles et du postulatum d'Euclide.

Scolie. — Cette définition est la *dérivée* (47) de la proposition 94 donnant la définition de l'angle. (Voir plus loin le chapitre sur le postulatum d'Euclide.)

Cor. 1. — Deux parallèles ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les prolonge, car si elles se rencontraient, elles feraient un angle (91). Elles ne sont donc pas obliques l'une par rapport à l'autre (102).

Cor. 2. — Par un point donné il ne peut passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Cor. 3. — Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles (45).

119. *Déf.* — On nomme *sécante* toute droite qui passe par deux points appartenant à deux parallèles. La droite PQ (fig. 16) est une sécante.

Une sécante fait avec ces deux parallèles huit angles, que l'on range par couples portant différents noms.

Fig. 16.

Ce sont d'abord les angles *correspondants* situés d'un même côté de la sécante et s'ouvrant dans le même sens. Tels sont les couples 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8, situés alternativement à gauche et à droite de la sécante, et s'ouvrant les quatre premiers vers le haut, les quatre autres vers le bas.

Scolie. — Ces angles, pris deux par deux, ont leurs côtés dirigés respectivement dans le même sens.

Viennent ensuite les angles *alternes-internes* et *alternes-externes*, situés de côté et d'autre de la sécante, mais renfermant ou ne renfermant pas l'espace compris entre les parallèles. Tels sont respectivement les couples 3 et 6, 4 et 5, et les couples 1 et 8, 2 et 7.

Scolie 1. — Ces angles, pris deux par deux, ont leurs côtés dirigés respectivement en sens contraires.

Enfin, on distingue encore les *internes* ou les *externes* d'un même côté de la sécante. Tels sont respectivement les couples 3 et 5, 4 et 6, et les couples 1 et 7, 2 et 8.

Scolie 2. — Ces couples ont deux côtés dirigés dans le même sens, ce sont ceux formés par les parallèles, et deux côtés dirigés en sens contraires, ce sont ceux formés par la sécante.

Cor. 1. — Les angles correspondants sont égaux ; il en est de même des angles alternes-internes et des angles alternes-externes; les angles alternes ou externes d'un même côté sont supplémentaires.

Cor. 2. — Pour mener par un point M (fig. 16) une parallèle à une droite donnée AB, on joint par une sécante MN ce point M à un point quelconque N de la droite AB, puis l'on mène la droite CD de manière que l'angle NMC soit égal à l'angle MNB.

120. *Théor.* — Deux droites qui font avec une même sécante deux angles correspondants égaux sont parallèles.

Il en est de même si elles font deux angles alternes-internes ou alternes-externes égaux.

Il en est encore de même si elles font deux angles internes ou externes d'un même côté de la sécante dont la somme est égale à deux droits.

Démonstration par l'absurde [1].

121. *Théor.* — Lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles chacun à chacun et dirigés tous deux chez l'un et chez l'autre dans le même sens ou en sens opposés, ils sont égaux. Dans le cas contraire, ils sont supplémentaires.

[1] Il suffit de donner un exemple de ce genre de démonstration parfaitement légitime, mais dont il faut user avec discrétion. Si (fig. 16) les deux droites AB et CD qui font avec la sécante PQ les angles correspondants 1 et 5 supposés égaux, n'étaient pas parallèles, on pourrait mener par le point M une parallèle à AB (119, cor. 2); or, cette parallèle ferait avec la sécante PQ un angle égal à l'angle 5, comme correspondant; il serait donc égal aussi à l'angle 1, et par conséquent cette parallèle se confondrait avec MC.

Dém. — Soient (fig. 17) les deux angles BAC et B′A′C′ dont les côtés AB et A′B′ ainsi que AC et A′C′ ont même direction; ces angles ont donc même valeur et par conséquent sont égaux.

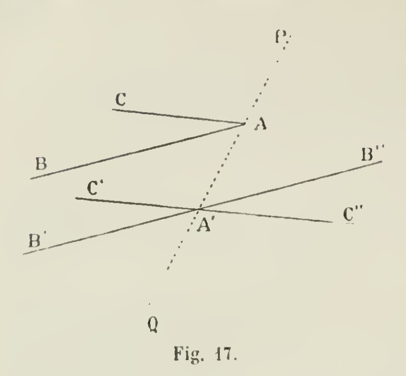


Fig. 17.

L'angle B″A′C″ a ses côtés dirigés en sens opposés, mais, comme il est égal à l'angle B′A′C′, il est aussi égal à l'angle BAC.

Enfin, langle B′A′C″ (ou l'angle B″A′C′) a un seul de ses côtés, à savoir A′C″ (ou A′B″) dirigé en sens opposé de AC (ou de AB), et comme il est le supplémentaire de l'angle B′A′C′, il le sera de l'angle BAC.

CHAPITRE INTERCALAIRE.

Théorie de la symétrie des figures planes. — Théorèmes sur l'intersection des plans.

A la rigueur, la théorie de la symétrie des figures planes obtenues par rabattement, a sa place au début de la géométrie du plan dans l'espace, de même que celle de la symétrie des figures rectilinéaires a sa place au début de la géométrie de la droite dans le plan.

D'ailleurs, la théorie du rabattement n'est pas nécessaire pour établir l'identité des figures planes symétriques. C'est ce que nous avons vu par le théorème 115, pour la démonstration duquel il suffit de déplacer le spectateur, sans rabattre le plan.

Mais je l'insère ici, ne me proposant pas d'aborder la géométrie à trois dimensions. Toutefois, on voudra bien remarquer qu'elle ne s'appuiera que sur des propositions acquises.

Théorème I. — Les deux faces d'un même plan sont symétriques, en ce sens que toute figure tracée sur l'une apparaît sur l'autre avec sa forme symétrique.

Dém. — Même démonstration qu'au théorème 113. Cette démonstration s'appuie au fond sur la définition de la symétrie (41).

Cor. 1. — Deux figures planes symétriques tracées sur la même face du plan, deviendraient identiques si l'on *rabattait* autour d'une droite, comme autour d'une charnière, la partie du plan sur laquelle l'une d'elles est tracée, de manière à mettre en avant la face qui est en arrière.

Cor. 2. — Il suit de là, comme déjà du théorème 113, que les propositions concernant les conditions de l'identité des figures planes, sont valables pour les figures symétriques, et se rapportent par conséquent d'une manière générale aux conditions de leur égalité (41).

Théorème II. — L'espace étant donné [1], on peut, par une même droite mener une infinité de plans.

Dém. — Par cette droite et un point pris en dehors de cette droite, faisons passer un premier plan (86, cor. 1). Prenons ensuite dans l'espace un point qui ne soit pas contenu dans le plan. La droite et ce point détermineront un second plan. De même, en prenant un troisième point qui ne soit contenu dans aucun de ces deux plans, on pourra en faire passer un troisième par lui et la droite; et ainsi de suite.

Rem. — Il y a toujours de ces points qui ne sont dans aucun des plans construits, puisque des plans, qui sont des surfaces et par conséquent des néants d'espace (définitions préliminaires), ne peuvent combler l'espace.

Théorème III. — Deux plans qui ont deux points communs ont en commun la droite entière qui joint ces deux points.

Dém. — Si nous traçons la droite, elle sera tout entière à la fois dans l'un et l'autre plan comme y ayant deux de ses points (79).

Cor. 1. — Toute droite tracée sur un plan peut être considérée comme étant une droite commune à deux plans identifiés.

[1] Cette addition est de toute rigueur, puisque nous faisons ici une excursion dans la géométrie à trois dimensions.

Cor. 2. — Si l'on fait tourner l'un de ces deux plans identifiés autour de la droite supposée commune, soit (fig. 18) le plan Q autour de la ligne XY, la surface qui se montre à nous finira par recouvrir la surface P et nous verrons alors la face inférieure du plan Q.

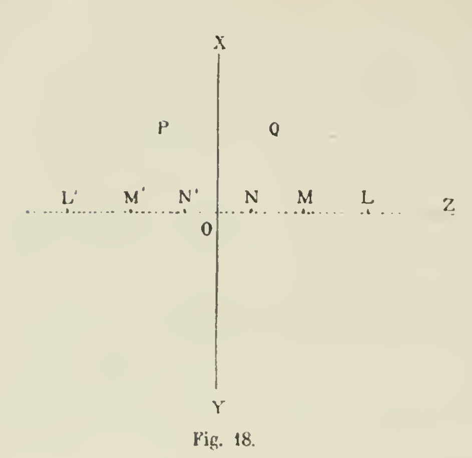


Fig. 18.

Déf. — Le demi-tour que l'on imprime à un plan autour d'une de ses droites, prise comme *charnière*, s'appelle *rabattement*.

Théorème IV. — Si dans le plan à rabattre on prend sur une perpendiculaire quelconque à la charnière un point situé à une distance arbitraire de son pied, ce point occupera, après le rabattement, une place à égale distance sur le prolongement de la perpendiculaire.

Dém. — Soit M (fig. 18) un point du plan Q pris arbitrairement sur une perpendiculaire quelconque OZ à la charnière. Le rabattement fera tomber OM sur le prolongement de la perpendiculaire OM', puisque les deux angles XOM et XOM' sont égaux en leur qualité d'angles droits, et la distance OM' sera égale à la distance OM. Il en sera de même pour des points tels que L et N, qui viendront en L' et N'; et l'on voit que la figure rectilinéaire LMN a pour symétrique la figure rectilinéaire L'M'N'; ce qui pourrait s'établir directement en faisant faire dans le plan un demi-tour à la droite OZ autour du point O (85).

Scolie. — De là la définition ordinaire de la symétrie :

« Deux points sont symétriques par rapport à une droite lorsque cette droite est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.

» Deux figures sont symétriques par rapport à une droite lorsque chaque point de l'une d'elles a son symétrique sur l'autre figure. »

Seulement cette définition a le tort de confondre la position symétrique avec la symétrie.

Cor. — Tout point d'une figure plane tracée sur un plan pouvant être envisagé comme situé sur une perpendiculaire à la charnière, le rabattement du plan autour de cette charnière transforme cette figure en sa symétrique.

Ainsi est démontrée l'identité par rabattement des figures planes symétriques.

Puisque j'ai fait une incursion dans la troisième dimension, on me permettra de m'y attarder encore un peu. Le sujet que je vais traiter est un hors-d'œuvre, mais je serai bref.

Dans les observations préliminaires dont j'ai fait précéder la géométrie de la droite (p. 36), j'ai signalé une lacune tout au commencement du cinquième livre de Legendre. Entre les deux premiers théorèmes sur le plan (une droite ne peut être en partie dans le plan, en partie dehors; trois points déterminent un plan), et le troisième (quand deux plans se coupent, c'est suivant une ligne droite), devrait venir une proposition établissant que deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point de commun, en d'autres termes qu'ils ne peuvent pas être tangents extérieurement ou intérieurement à la façon de deux calottes sphériques, ou se toucher, soit encore extérieurement ou intérieurement, à la façon de deux surfaces coniques.

Cette lacune, je ne pense pas qu'elle ait été comblée quelque part. Elle ne l'a pas été à coup sûr, quoi qu'en ait dit M. Mansion dans *Mathesis* [1], par Rouché-Combérousse; c'est ce que j'ai fait voir dans une note d'une réponse à M. Lechalas [2]. Le lecteur ne trouvera pas mauvais que je montre ici comment elle peut l'être.

[1] Voir n° de juin 1892, p. 237.

[2] Voir *Revue philosophique*, janvier 1894, p. 79. Voici cette note : « La solution Rouché-Combérousse suppose qu'une droite qui rencontre un plan, y est contenue tout entière ou le transperce. Or, si deux plans pouvaient ne se toucher qu'en un point à la façon de deux surfaces sphériques ou de deux cônes ayant même sommet, il est clair que toute droite passant par ce point et située dans l'un d'eux ne transpercerait pas l'autre. »

Il voudra bien remarquer que j'aborde ce qu'on est convenu d'appeler, depuis Legendre, le cinquième livre de la géométrie, armé des seuls théorèmes démontrés jusqu'ici, c'est-à-dire sans l'aide des parallèles et des triangles, ni des angles dièdres.

Si je me sers de quelque terme non défini, il n'y a pas à s'en formaliser, du moment que le terme est employé dans son sens usuel.

Lemme. — Le plan divise l'espace dans toute son étendue (cf. prop. 79).

Théorème I. — Lorsque deux plans ont une droite commune, ils se coupent, c'est-à-dire que chacun d'eux est situé des deux côtés de l'autre (cf. 104).

Dém. — Soient (fig. 19) deux plans P et Q, ayant en commun la droite XX'. Je dis que ces deux plans ne peuvent pas avoir la position indiquée dans la figure, c'est-à-dire telle qu'ils seraient tangents le long de la droite XX', mais qu'ils se coupent comme la même figure peut aussi l'indiquer, pourvu qu'on se représente les surfaces MM' et NN' comme des plans s'entrecoupant le long de la droite XX'.

Fig. 19.

Dém. — Par un point quelconque X de la droite XX', je mène deux droites, l'une XY dans le plan P, l'autre XZ dans le plan Q. Les deux droites, ayant un point commun, sont dans le même plan, donc elles se coupent (104); elles prennent donc les positions YZ' et ZY', et non pas les positions YY' et ZZ', et, par conséquent, chacune d'elles passe à l'autre côté du plan qu'elle rencontre.

Comme ce qui vient d'être dit des droites XY et XZ peut se dire de toutes autres droites, telles que X'M et X'N, on peut trouver dans le plan P autant de points que l'on veut situés à l'autre côté du plan Q, et réciproquement.

Donc ces deux plans se coupent. C. Q. F. D.

Théorème II. — Lorsqu'une droite rencontre un plan dans lequel elle n'est pas située, elle le perce.

Dém. — Soit O (fig. 20) le point où la droite X rencontre le

plan P. Par ce point, dans le plan P, traçons une droite quelconque Y et faisons passer un plan Q par celle-ci et la droite X. Ce plan Q coupera le plan considéré P, puisqu'il aura avec lui la droite commune OY (théorème I). Quant à la droite X, tout en restant dans le plan Q, elle coupera la droite OY (104) et passera de cette façon à l'autre côté du plan P.

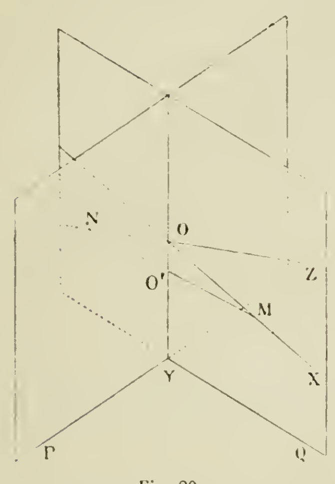


Fig. 20.

Théorème III. — Lorsque deux plans ont un point commun, ils en ont un second et par conséquent se coupent suivant une droite.

Dém. — Soit O (même figure) le point commun aux plans P et Q. Par ce point O et dans le plan Q faisons passer deux droites OZ et OX qui perceront le plan P (théorème II). Prenons sur la droite OX un point M situé d'un côté du plan P, et sur la droite OZ un point N situé à l'autre côté du même plan P. Joignons ces deux points par une droite; celle-ci coupera le plan P en un point O′ (cf. 82), second point de l'intersection, laquelle intersection sera la droite Y passant par O et O′.

CHAPITRE VII. — Les trigones.

122. *Déf.* — On appelle proprement *polygone* une ligne polygonale *fermée*, c'est-à-dire sans extrémité libre, et plus spécialement *ligne polygonale*, la ligne polygonale ouverte et présentant deux extrémités libres (115).

On appelle en général *trigone* la ligne polygonale composée de trois droites, soit indéfinies, soit semi-droites, soit portions de droites. Les figures 21, 22, 23 sont des trigones.

Si le trigone est fermé, il porte spécialement le nom de *triangle;* si c'est une ligne brisée ouverte, celui de *biangle.*

123. *Déf.* — Le *triangle* est un polygone formé de trois por-

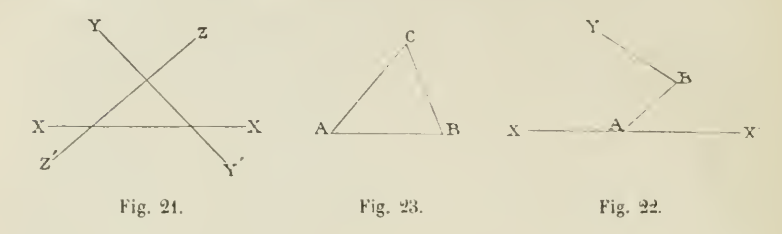


Fig. 21. Fig. 23. Fig. 22.

tions de droite reliant deux à deux trois points non en ligne droite. La figure ABC est un triangle (fig. 23).

Dans un triangle, par conséquent, outre les *trois côtés,* on distingue *trois sommets, trois angles, trois coins.*

Rem. 1. — Par abus, les côtés du triangle, quoique finis, sont dits être les côtés des angles.

123bis. *Déf.* — Si ses trois côtés sont inégaux, le triangle est dit *scalène.*

Si deux de ses côtés sont égaux, le triangle est dit *isocèle,* et l'on y désigne *spécialement* sous le nom de *sommet* le point de rencontre des côtés égaux, et sous le nom de *base* le côté opposé à ce sommet.

Si ses trois côtés sont égaux, le triangle est dit *équilatéral.*

Scolie. — Qu'il puisse y avoir des triangles isocèles, et partant des triangles équilatéraux, c'est ce qui résulte de la propriété du plan de recevoir des figures symétriques (85, 106, scolie et théorie de la symétrie).

Rem. 2. — Lorsque toute confusion est impossible, on désigne souvent les angles du triangle par la lettre de leur sommet, qu'on choisit majuscule, et le côté opposé par la même lettre minuscule. Ainsi l'angle CAB sera désigné A, et le côté opposé BC sera désigné *a.*

Les angles du triangle sont toujours censés être les angles intérieurs, c'est-à-dire dirigés vers le côté opposé.

Scolie. — Le triangle est l'une des figures les plus importantes de la géométrie, parce que toute figure rectiligne peut se décomposer en triangles et se définir au moyen de ces triangles. (Cf. 112, scolie 2.)

124. *Déf.* — Le *biangle* est une ligne brisée ouverte formée d'une portion de droite, portant à ses deux extrémités soit deux semi-droites (*biangle unilatère*), soit une semi-droite et une portion de droite (*biangle bilatère*), soit deux portions de droite (*biangle trilatère*).

Dans un biangle unilatère (fig. 24, 25, 26), on distingue deux sommets A et B, puis deux angles ayant en commun un côté fini AB (123, rem. 1), enfin deux côtés indéfinis AX et BY.

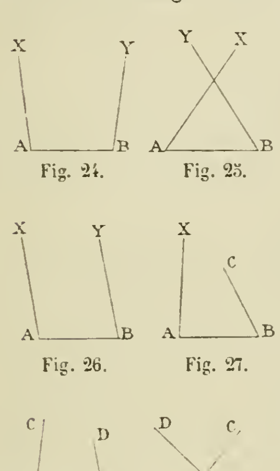


Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

Dans la figure 24, les semi-droites AX et BY sont divergentes ; dans la figure 25, convergentes ; dans la figure 26, parallèles.

Scolie 1. — La figure formée par deux parallèles et une sécante (119, fig. 16) peut être considérée comme un biangle où, par dérogation à la définition, les côtés seraient des droites indéfinies dans les deux sens.

Scolie 2. — Le triangle est un biangle unilatère convergent (fig. 25) dont on nie les prolongements des semi-droites AX, BY au delà du point de convergence.

Dans un biangle bilatère (fig. 27), on distingue trois sommets A, B, C, deux angles (123, rem. 1), un coin ABC, deux côtés finis AB et BC, un côté indéfini AX.

Dans un biangle trilatère (fig. 28 et 29), on distingue quatre sommets A, B, C, D, deux angles, deux coins, les trois côtés finis.

Scolie 3. — Le triangle est un biangle trilatère où les deux extrémités libres (112) se confondent.

125. *Théor.* — Un triangle est déterminé quand on donne ses trois sommets.

Dém. — Il n'y a qu'une seule manière possible de relier ces trois sommets par trois portions de droite.

Cor. 1. — Un triangle est déterminé quand on donne un de ses coins, puisque par là on donne ses trois sommets.

125bis. *Cor.* 2. — Deux triangles sont égaux quand ils ont un coin égal; en d'autres termes, quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

Alors, les deux autres coins sont aussi égaux; en d'autres termes, sont alors égaux le troisième côté et les deux autres angles chacun à chacun.

Rem. — L'égalité est par identité ou par symétrie, suivant que les éléments donnés comme égaux le sont par identité ou par symétrie. Cette remarque sera désormais presque toujours sous-entendue (114).

126. *Théor.* — Un triangle isocèle est à lui-même son symétrique.

Dém. — Soient C (fig. 30) le sommet du triangle et $b = a$ les deux côtés égaux, le coin BCA est égal au coin ACB (112, cor. 2; 125bis).

Cor. 1. — Dans un triangle isocèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux; c'est-à-dire que l'angle B = l'angle A.

Fig. 30.

Cor. 2. — Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux.

Observation. — Il doit avoir paru depuis une vingtaine d'années bon nombre de géométries élémentaires. Je n'en ai lu aucune. On voudra bien me pardonner ce défaut d'érudition. Ces années, je les ai employées à des travaux assez considérables dans d'autres domaines de la philosophie et des sciences. Dans aucun des livres scolaires que jusqu'alors j'avais eu l'occasion de lire ou de feuilleter, je n'avais trouvé la propriété du triangle isocèle présentée de cette façon et à cette place. Je

croyais bonnement que cette innovation m'appartiendrait, si un jour — ce que j'étais loin de prévoir — je me remettais à la géométrie. Aussi ai-je été quelque peu contrarié de la trouver dans Rouché-Comberousse, ce qui me fait supposer qu'elle pourrait être aussi dans d'autres auteurs. J'ose dire cependant que dans Rouché le théorème n'est pas démontré avec la rigueur désirable. Le *renversement* de la figure à travers l'espace, obtenu à l'aide d'un mouvement absolument indéterminé — j'entends sans l'indication d'un axe fixe pris dans le plan — me paraît un procédé sujet à caution. Quant à moi, je n'ai pas même eu besoin du rabattement. (Voir plus loin 130, *observation.*)

127. *Théor.* — Un biangle unilatère est déterminé quand on donne le côté fini et les deux angles.

Dém. — On ne peut disposer que d'une manière identique ou symétrique les deux côtés indéfinis.

Cor. 1. — Deux biangles unilatères sont égaux s'ils ont le côté fini égal et adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Scolie. — Les deux côtés indéfinis peuvent être parallèles, diverger ou se couper (124). Dans ce dernier cas, le biangle comprend un triangle (124, scolie 2).

128. *Cor.* 2. — Un triangle est déterminé quand on donne un de ses côtés et la direction des deux autres, en d'autres termes, quand on donne un de ses biangles unilatères, c'est-à-dire un de ses côtés et les deux angles adjacents.

128bis. *Cor.* 3. — Deux triangles sont égaux quand ils ont un même biangle unilatère, c'est-à-dire un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Par conséquent, ils ont le troisième angle égal et les deux autres côtés égaux chacun à chacun.

Observation. — Dans les géométries usuelles, on admet implicitement qu'*un trigone dont on donne un côté et les angles adjacents est nécessairement un triangle.* C'est passer par-dessus le postulatum d'Euclide sans s'en douter. (Voir 131, cor. 2.)

Cor. 4. — Si les angles donnés sont égaux, le triangle est à lui-même son symétrique ; aux angles égaux sont opposés des côtés égaux, et le triangle est isocèle. (Cf. 126, cor. 1.)

Cor. 5. — Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux. Réciproquement, si les trois angles sont égaux, le triangle est équilatéral. (126, cor. 2.)

Cor. 6. — Dans un triangle scalène, les trois angles sont inégaux ; et réciproquement, si les trois angles sont inégaux, le triangle est scalène.

Démonstration par l'absurde.

129. *Théor.* — Deux triangles sont égaux quand ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Ils sont identiques si les côtés sont disposés dans le même ordre ; ils sont symétriques dans le cas contraire.

Dém. — Soient (fig. 31) les deux triangles ABC et A′B′C′ où

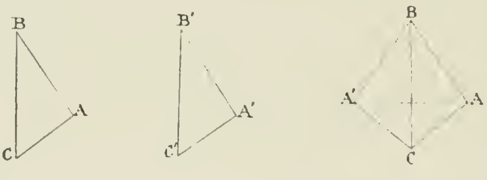


Fig. 31.

l'on a les égalités $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, et disposons-les symétriquement autour d'un côté égal, soit CB = C′B′, de manière que nous aurons AB = A′B = A′B′ et AC = A′C = A′C′. Tirons la ligne auxiliaire AA′. Le triangle BAA′ est isocèle, puisque AB = A′B, et par conséquent les angles BAA′ et BA′A sont égaux. Il en est de même du triangle CAA′, où AC = A′C, et où par conséquent les angles CA′A et CAA′ sont égaux.

Donc les angles BAC et BA′C sont égaux comme représentant chacun la somme de deux angles égaux chacun à chacun.

Donc les triangles ABC et A′BC sont égaux comme ayant un angle égal, à savoir A et A′, compris entre côtés égaux chacun à chacun, à savoir A′B = AB et A′C = AC.

Donc les deux autres angles sont aussi égaux chacun à chacun.

Cor. 1. — Dans deux triangles égaux, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux et, inversement, les côtés opposés aux angles égaux sont égaux.

130. *Cor.* 2. — Un triangle est déterminé quand on donne ses trois côtés. (Voir 146, cor. 1.)

Rem. — Nous disons *ses trois côtés* et non trois portions de droite, car il n'est pas dit qu'avec trois portions de droite on puisse toujours construire un triangle.

Observation. — On remarquera que ce théorème et son corollaire ne correspondent pas exactement *pour l'ordre* aux théorèmes et corollaires (125, 125bis ; 128, 128bis) sur les autres cas d'égalité des triangles. J'aurais certainement pu faire disparaître cette anomalie en intervertissant l'ordre de ces derniers. Peut-être même serait-ce là chose préférable. Si je l'ai laissée subsister, c'est précisément pour attirer l'attention sur elle.

On peut, comme je viens de le dire, transposer les théorèmes et corollaires concernant les deux premiers cas d'égalité, mais non ceux concernant le troisième. C'est singulier. De plus, ce troisième, non seulement nous ne le démontrons pas directement, mais nous profitons des propriétés du triangle isocèle, et encore, avons-nous recours à une ligne auxiliaire ; enfin nous remplaçons un des triangles par son symétrique.

Ces étrangetés m'ont bien tourmenté, et j'en ai cherché et j'en cherche encore la raison. Consisterait-elle en ce que les trois côtés doivent satisfaire à la double condition d'être chacun moins grand que la somme des deux autres et plus grand que leur différence? Résiderait-elle en ceci, que le problème de la construction du triangle au moyen des trois côtés paraît au premier abord indéterminé ?

En effet, on peut tracer dix triangles avec trois côtés. Sur la base a, on peut en construire quatre : deux (symétriques), en prenant respectivement B et C comme centres et b et c comme rayons, et deux autres (toujours symétriques) en prenant c et b comme rayons. Cette opération, on peut la répéter sur les bases

b et *c*, le même triangle venant trois fois. Cette raison est-elle valable? Je n'en sais rien ; elle ne me plaît que tout juste. Je voudrais que quelqu'un en trouvât une meilleure ou, ce qui vaudrait encore mieux, démontrât directement le théorème.

Je pourrais répéter ici l'observation dont j'ai fait suivre la proposition 126 sur le triangle isocèle. On a pu voir avec quel soin j'évite les lignes auxiliaires et les théorèmes accessoires ne contenant que des vérités de passage, si je puis ainsi parler. Bien que la démonstration qu'on vient de lire ne soit pas absolument irréprochable, je la croyais mienne. Elle est parfaitement dans Rouché-Comberousse. Je suis heureux de ne pas l'avoir su lorsque je la cherchais, car rien ne tue l'originalité comme de n'avoir aucun motif de se montrer original.

131. *Théor.* — Dans tout triangle la somme des trois angles équivaut à deux angles droits.

Dém. — Soit (fig. 32) le triangle ABC. Si nous prolongeons un côté quelconque AB, et si par le point B nous menons BC′ parallèle au côté AC, nous réunissons autour de ce point les trois angles du triangle, à savoir l'angle ABC, l'angle BCA qui est égal à l'angle CBC′ comme alterne interne (119, cor. 1), et enfin l'angle CAB qui est égal à l'angle C′BD comme correspondant (119, cor. 1). Or, la somme des trois angles ABC, CBC′ et C′BD équivaut à deux droits (99, cor. 4, et 102, scol.); donc celle des trois angles du triangle équivaut à deux droits. C. Q. F. D.

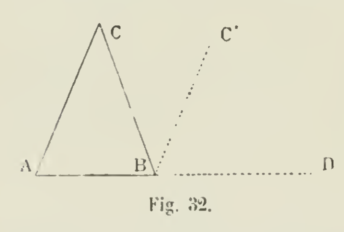


Fig. 32.

Cor. 1. — Quand on connaît deux angles d'un triangle, on connaît par cela même le troisième.

Cor. 2. — Il s'ensuit que ce triangle-là serait impossible à construire dont on donnerait un côté et les deux angles adjacents, si la somme de ces deux angles était égale ou supérieure à deux droits. (Cf. 141, 142, 143.)

Scolie. — Si l'on avait considéré la droite ABD comme

norme, la direction du côté AC eût été fournie par l'angle CAB (ou CAD); celle du côté BC par l'angle CBD. La différence de ces deux directions, qui est l'angle BCA, est par conséquent égale à la différence des angles CBD et CAB, ce qui est exprimé par l'équation

$$BCA = CBD - CAB,$$

qui devient

$$CBD = BCA + CAB \text{ (ou CAD)}.$$

Cette équation se traduit comme suit :

132. *Cor.* 3 et *déf.* — Tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs qui lui sont opposés.

On appelle *angle extérieur* tout angle comme CBD compris entre un côté et le prolongement d'un autre.

Si aux deux membres de la dernière équation on ajoute l'angle ABC, le premier membre équivaudra à deux angles droits, et le second membre renfermera les trois angles du triangle.

133. *Cor.* 4. — La valeur d'un angle peut être exprimée en fonction des angles que ses côtés font avec une droite quelconque prise pour norme.

134. *Théor.* — La somme des angles extérieurs d'un triangle pris dans le même sens équivaut à quatre droits.

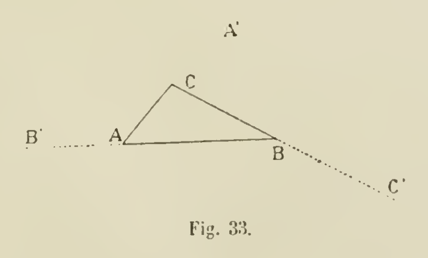


Fig. 33.

Dém. — La somme de ces angles : B AC + A'CB + C'BA (fig. 33), est égale à deux fois la somme des angles du triangle, et partant à quatre angles droits.

135. *Théor.* — Dans un polygone quelconque, la direction d'un des côtés est égale à la somme algébrique des changements de direction effectués par les autres côtés, ces changements étant pris avec leurs signes.

Dém. — Soit (fig. 34) un polygone ABCDE. Prenons l'un des côtés AE pour norme, c'est-à-dire comme ayant une direc-

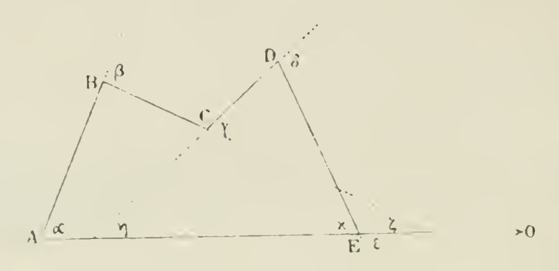


Fig. 34.

tion = 0; il faut démontrer que la somme algébrique des changements de direction marqués par les angles $+\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$, $-\delta$, $+\varepsilon$ est égale à 0.

Or, $\beta = \alpha + \zeta$; $\gamma = \zeta + \eta$; $\delta = \gamma + \varkappa$; $\varkappa = \varepsilon$ (132; 105).

Faisant la somme $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon$, on trouvera 0.

Scolie. — Si la ligne polygonale, au lieu d'être fermée, est restée ouverte, par exemple, entre A et E, il suit de ce théorème que sa direction moyenne ou résultante est celle de la droite qui passe par ses extrémités, conclusion conforme à la manière vulgaire dont nous caractérisons la direction d'un chemin.

Cor. 1. — Si l'on fait tourner une droite en l'appliquant successivement sur les côtés d'un polygone, quand elle est revenue à sa position première, elle a tourné de quatre angles droits.

Cor. 2. — Un polygone est déterminé quand on donne tous ses côtés moins un dans leur ordre et les angles compris.

Il est encore déterminé quand on donne tous ses côtés moins deux dans leur ordre avec leurs angles adjacents.

Il est encore déterminé quand on donne tous ses côtés dans leur ordre et les angles compris sauf deux (cf. 115).

136. *Théor.* — Deux triangles sont semblables quand un coin de l'un est semblable à un coin de l'autre.

Dém. — Par majoration on rend ces coins égaux, ainsi que les triangles (117, 125bis).

Cor. 1. — Les triangles semblables ont leurs coins homologues semblables.

137. *Cor.* 2. — Les triangles semblables ont leurs angles homologues égaux et leurs côtés homologues proportionnels. En effet, la similitude des coins A et A' donne la proportion $b : b' = c : c'$; celle des coins B et B', la proportion $c : c' = a : a'$.

Ces deux proportions se fondent en une seule :

$$a : a' = b : b' = c : c'.$$

138. *Théor.* — Quel que soit le point d'un plan pris pour centre de majoration, la majoration ne change pas la direction des droites tracées dans le plan (cf. 110).

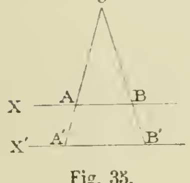


Fig. 35.

Dém. — Soit (fig. 35) une droite X et un point O quelconque, situé dans le plan auquel elle appartient. Prenons deux points A et B sur cette droite, joignons-les au point O et majorons du point O pris comme centre (111) le triangle OAB ainsi formé. Nous obtiendrons un triangle OA'B', semblable au triangle OAB, et où l'angle OA'B' sera égal à l'angle OAB. Par conséquent A'B' sera parallèle à AB (119, corol. 1). C. Q. F. D.

Scolie. — Nous avons vu que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Par conséquent, à mesure que l'un des angles diminue, la somme des deux autres augmente, et cette somme a pour limite deux angles droits.

De même, à mesure que deux angles diminuent, la valeur du troisième augmente, et cette valeur a aussi pour limite deux angles droits. Dans le premier cas, deux côtés du triangle finissent par devenir parallèles, et par conséquent le triangle s'évanouit et devient un triangle indéfini dans un sens, puisqu'il

n'a pas de troisième sommet. Dans le second cas, deux côtés du triangle forment une ligne droite parallèle au troisième côté, et par conséquent le triangle n'a plus que deux côtés parallèles et aucun sommet, et il s'évanouit de même. En résumé :

Cor. — Deux côtés d'un triangle ne peuvent être parallèles.

139. *Théor.* — Deux triangles sont semblables quand ils ont leurs angles égaux chacun à chacun.

Dém. — Plaçons (fig. 36) les triangles donnés ABC et AB′C′

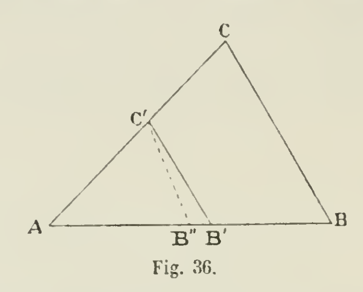


Fig. 36.

de manière à faire coïncider deux angles égaux ainsi que leur sommet A, et à faire correspondre l'angle C′ à son égal C, et de même l'angle B′ à son égal B. Le côté C′B′ sera parallèle à CB (120).

Je dis maintenant que l'on aura : AC : AC′ = AB : AB′.

Car si nous prenons sur AB le segment AB″ tel que l'on ait : AC : AC′ = AB : AB″, les deux triangles ABC et AB″C′ seront semblables en vertu du théorème précédent, et par suite l'angle AC′B″ sera égal à l'angle ACB, qui est égal à l'angle AC′B′. Donc le point B″ se confondra avec le point B′ et l'on aura : AC : AC′ = AB : AB′. C. Q. F. D.

Cor. 1. — Deux triangles sont semblables quand ils ont deux angles égaux chacun à chacun; car alors ils ont aussi le même troisième angle (131, cor. 1).

Cor. 2. — Deux triangles isocèles sont semblables quand ils ont l'angle du sommet ou l'angle de la base égal.

140. *Théor.* — Deux triangles sont semblables quand ils ont leurs côtés proportionnels.

Soient (fig. 37) deux triangles ABC et A'B'C' tels que

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sur le côté AB du triangle ABC, prenons AB'' = A'B', et

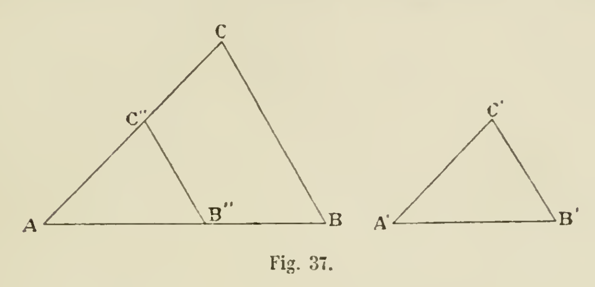


Fig. 37.

menons la parallèle B''C'' à BC. Les deux triangles ABC et AB''C'' sont semblables comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun (139); leurs côtés sont donc proportionnels et l'on a

$$AB : AB'' = AC : AC'' = BC : B''C'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Or, AB'' = A'B' par construction. Les deux proportions (1) et (2) ont ainsi un rapport commun. Les autres rapports sont donc égaux, et l'on a

$$AC : A'C' = AC : AC'', \text{ et } BC : B'C' = BC : B''C''.$$

Ces deux proportions ont leurs antécédents égaux; les conséquents sont donc égaux, et l'on a : A'C' = AC''; B'C' = B''C''.

Les deux triangles A'B'C' et AB''C'' ont ainsi leurs côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux (129); et comme AB''C'' est semblable à ABC, A'B'C' est aussi semblable à ABC.

Scolie 1. — La démonstration se simplifie par la remarque que la majoration convenable du triangle A'B'C', en rendant ses côtés égaux à ceux du triangle ABC, le rend égal à celui-ci. Donc avant la majoration il lui était semblable. Si je n'ai pas usé de cette démonstration *légitime*, c'est uniquement pour ne pas heurter les habitudes.

Scolie 2. — Cette proposition peut se démontrer directement en partant du théorème 136.

Soit (fig. 38) un triangle ABC, et O un centre quelconque de majoration (111). Le triangle OAC est déterminé ainsi que OAB et OBC, puisque les trois sommets de chacun sont donnés (125). Minorons la figure en O'A'B'C'. Les triangles O'A'C', O'A'B' et O'B'C' seront respectivement semblables aux triangles OAC, OAB, OBC, comme ayant (110) des coins semblables, à savoir ceux qui ont O pour sommet; il s'ensuivra que les côtés AC, AB, BC seront proportionnels aux côtés A'C', A'B, B'C'. De plus les angles ABC, BCA et CAB seront respectivement égaux aux angles A'B'C', B'C'A et C'A'B', comme égaux à la différence ou à la somme d'angles égaux; par conséquent les deux triangles ABC et A'B'C' auront leurs trois coins semblables. C. Q. F. D.

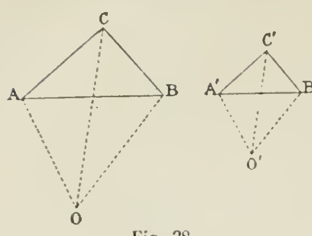


Fig. 38.

Scolie. — Les polygones ou lignes polygonales semblables peuvent se décomposer en triangles semblables et se décrire au moyen de ces triangles.

Les triangles semblables chacun à chacun sont dits homologues.

Cor. — Les polygones et lignes polygonales semblables ont leurs angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. (Cf. 117, corol.)

Observation. — Il me sera permis de faire observer que la théorie entière de la similitude des triangles a été exposée sans recourir au postulat d'Euclide — que nous allons d'ailleurs démontrer. Cette théorie aurait pu s'abréger de beaucoup; mais j'ai tenu à me conformer dans cet essai aux lenteurs de la géométrie scolaire usuelle. Si parfois j'ai enchainé trois ou quatre théorèmes, cet enchaînement a été rarement nécessaire.

En tête de la nouvelle géométrie, j'inscrivais ce desideratum : éviter les théorèmes de pur passage, si je puis ainsi les nommer, et appuyer la démonstration sur les principes et les données que suppose son énoncé. Je vais, comme spécimen, démontrer

directement le théorème capital sur la similitude, en invoquant seulement les connaissances qu'implique la notion des triangles semblables.

Ces connaissances comprennent : 1° les conditions générales d'égalité des figures (même grandeur et même forme), celles de leur similitude (même forme), le principe que la majoration répétée dans un rapport donné d'une même figure conduit à des figures identiques (45, cor. 5); 2° les conditions spéciales de l'égalité des triangles (égaux quand ils ont un coin égal, d'où la symétrie des triangles isocèles, etc.); la propriété des triangles égaux qu'aux côtés égaux sont opposés des angles égaux et réciproquement; enfin la propriété des coins semblables de renfermer le même angle entre côtés proportionnels (126, 127, 130 et cor., 117, 136).

Cela admis, voici la démonstration directe de la proposition 137, que, dans les triangles semblables, les angles sont égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels.

Dém. — Soit (fig. 39) un triangle scalène ABC. Ce triangle est déterminé par l'un quelconque de ses coins, soit A, soit B, soit C.

Majorons tour à tour chacun d'eux dans le même rapport arbitraire $1 : m$; nous formerons ainsi trois triangles semblables au triangle ABC, à savoir $AB'C'$, $A'BC''$, $A''B''C$, et égaux entre eux, puisqu'ils ont même grandeur et même forme (45, cor. 5).

Fig. 39.

Il résulte de la construction que

$AB' = mAB$; (1) $AC' = mAC$; (2) $BC'' = mBC$; (3)

$BA' = mBA$; (4) $CA'' = mCA$; (5) $CB'' = mCB$; (6).

De la comparaison des égalités (1) et (4), (2) et (5), (3) et (6), il suit que : $AB' = BA'$; (7) $AC' = CA''$; (8) $BC'' = CB''$; (9).

Enfin de ce que les triangles égaux ont leurs angles égaux chacun à chacun et qu'aux côtés égaux sont opposés des angles

égaux, il résulte respectivement des égalités (7), (8) et (9), l'égalité des angles C′ et C″ (10); B′ et B″ (11); A′ et A″ (12).

Mais nous ne savons pas et nous avons à démontrer que

B′C′ = mBC; (13) A′C″ = mAC; (14) A″B″ = mAB (15)

et que les angles C′ et C″ sont égaux à C (16); B′ et B″ à B (17): A′ et A″ à A (18).

Or si, dans les deux triangles égaux AB′C′ et A′BC″, où l'angle C′ = C″ (10), l'angle A n'était pas égal à l'angle A′, il serait égal à l'angle B′, et par conséquent le triangle AB′C′ et son semblable ABC seraient isocèles, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'angle A = A′ = A″ (18); B = B′ = B″ (17) et C = C′ = C″ (16). C. Q. F. D.

L'angle A étant égal à A′, il s'ensuit que B′C′ = BC″, et comme BC″ = mBC (3), il s'ensuit que B′C′ = mBC (13); et de même nous trouverons que A′C″ = mAC (14) et que A″B″ = mAB (15). C. Q. F. D.

Scolie. — La condition que le triangle ABC fût scalène était nécessaire. Il est clair, en effet, que si le triangle était, par exemple, équilatéral, B′C′ n'égalerait pas seulement mAB, mais aussi mBC et mAC, et l'angle B′ ne serait pas seulement égal à B, mais aussi à C et à A. Observation analogue pour le cas où le triangle ABC serait isocèle.

Ici se termine la théorie de la similitude des triangles. Elle aurait pu être abrégée notablement, je l'ai dit à maintes reprises. Elle est, en effet, contenue tout entière dans celle de la similitude des droites interrompues (72) et des coins (117) et n'en constitue qu'une pure application. Les longues démonstrations dont les théorèmes qui suivent ont été l'objet, n'avaient d'autre raison d'être que de ne pas rompre trop radicalement avec les procédés usuels. On pressent que la recherche des conditions de similitude des autres figures planes ou spatiales ne présentera aucune difficulté nouvelle. C'est ce que nous allons faire voir brièvement [1].

[1] Le lecteur désireux de plus amples développements les trouvera dans mes *Prolégomènes*, pp. 247 et suiv.

Appelons *figures de même genre* celles qui sont comprises sous la même définition; par exemple, les triangles (sous-genres : triangles isocèles, triangles rectangles, etc.), parallélogrammes (rectangles, carrés, etc.), circonférences; les parallélipipèdes, pyramides, cylindres, cônes; les ellipses, hyperboles, paraboles, cycloïdes, chaînettes; les hélices, sphères, ellipsoïdes, paraboloïdes, etc.; et appelons *figures de même espèce* les figures semblables dans chaque genre. Les figures d'une espèce donnée, par exemple, les triangles rectangles isocèles, ne différant qu'en grandeur, seront engendrées par la majoration (ou minoration) d'une seule et même figure prise pour type, par exemple un triangle rectangle isocèle déterminé. Il suffit donc de connaître un seul exemplaire de l'espèce pour avoir toute l'espèce. Or, étant préalablement donnés les éléments de la description du genre, quels seront ceux de la description de l'exemplaire pris pour type? Ce seront évidemment les conditions de l'égalité des figures dans ce genre. Ainsi, comme ces triangles-là sont égaux qui ont un coin égal ou leurs trois côtés égaux chacun à chacun, il s'ensuit qu'avec un même coin ou les mêmes trois côtés on ne peut que faire indéfiniment le même triangle.

Appelons *squelette* de la figure l'ensemble de ces éléments qui déterminent un type. Nous pourrons, sans qu'il soit besoin de démonstration, énoncer cette proposition générale que « *les figures d'un genre déterminé sont semblables quand leurs squelettes sont semblables* ». Or, le squelette se ramène en définitive toujours à des portions de droite faisant ou non entre elles certains angles. Il en résulte que les conditions de similitude des figures d'un genre déterminé sont la proportionnalité de ces portions de droite, jointe, s'il y a lieu, à l'égalité des angles qu'elles font entre elles.

De là, les conséquences importantes qui suivent :

Si le squelette d'une figure se réduit à une portion de droite unique, cette figure appartient à une espèce-genre, c'est-à-dire à un genre qui ne comporte qu'une seule espèce ou rien que des figures semblables. Tels sont les circonférences, sphères, hyperboles équilatères, paraboles, cycloïdes, polygones réguliers d'un même nombre de côtés.

Si le squelette comprend plus d'une portion de droite, les figures seront semblables quand ces portions seront dans le même rapport. Tels sont les ellipses, déterminées individuellement par la distance focale et le grand axe; les hyperboles, déterminées par la différence des rayons vecteurs et la distance focale; les cônes circulaires droits, déterminés par le rayon de leur base et leur hauteur; les hélices, déterminées par le rayon et le pas; les chaînettes, déterminées par leur longueur, la distance des points d'attache et la différence de hauteur de ceux-ci au-dessus d'un plan horizontal, etc.

Si le squelette comprend en outre des angles, il faut que ces angles soient identiques. Par conséquent, s'il comprend seulement une longueur et un angle, ces figures-là seront semblables dont le squelette contiendra le même angle. Tels sont les triangles rectangles ayant un même angle aigu; les triangles isocèles ayant le même angle au sommet ou à la base; les losanges ayant un même angle; les secteurs circulaires et les arcs de cercle de même angle; les loxodromiques faisant le même angle avec les méridiens; etc.

Si le squelette renferme plus d'une longueur, il va de soi que leur proportionnalité doit s'ajouter à l'égalité des angles. Ainsi des ellipses et des hyperboles sont semblables si leurs diamètres conjugués sont proportionnels et font le même angle; deux ellipsoïdes, si leurs axes rectangulaires sont proportionnels; deux cônes circulaires obliques, si leurs axes et les rayons de leurs bases sont proportionnels, et si l'angle de leur axe sur le plan de la base est le même; etc.

On peut parfois remplacer une longueur par un angle et réciproquement. Ainsi, au lieu de la différence de hauteur des points d'attache de la chaînette, on peut donner l'angle que la droite qui les joint fait avec un plan horizontal, et au lieu du pas de l'hélice, l'angle qu'elle fait avec les génératrices du cylindre.

Inutile de multiplier ces exemples. Ils suffisent pour montrer la fécondité du principe de l'homogénéité de l'espace.

CHAPITRE VIII. — Le postulatum d'Euclide.

Après ces digressions, nous reprenons la suite de nos théorèmes et abordons la démonstration directe du postulatum d'Euclide. Nous avons pu nous en passer jusqu'ici. C'est assez dire qu'on sera rarement dans la nécessité d'en faire usage. Au fond, ce n'est presque plus qu'une simple curiosité, comme il y en a d'autres encore dans les sciences mathématiques.

Reportons-nous à la définition du *biangle* unilatère (124) et au scolie premier, qui, par extension, fait rentrer dans les biangles de cette espèce la figure formée de deux parallèles coupées par une sécante. Comme les parallèles ne peuvent se rencontrer (118, cor. 1), cette figure ne peut devenir triangle. La question est maintenant de savoir s'il existe des biangles dont les côtés libres *non parallèles* ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge.

A cette question, le postulatum d'Euclide répond négativement; il affirme que *les droites non parallèles se rencontrent si on les prolonge suffisamment.*

Le scolie de la proposition 118 fait remarquer que la définition des parallèles (droites ayant même direction) est la dérivée (47) de la définition de l'angle (semi-droites partant d'un même point, 94).

Ceci demande quelque développement.

Cette définition de l'angle, en tant que définition de figure, est irréprochable. Mais comme l'angle de deux droites subsiste même si on ne les prolonge pas jusqu'à leur point de rencontre, elle donne lieu à quatre propositions :

1° *Principale.* — Les côtés d'un angle (c'est-à-dire deux droites qui partent d'un même point) ont des directions différentes.

2° *Inverse.* — Deux droites qui ont des directions différentes, forment un angle (c'est-à-dire se rencontrent).

3° *Réciproque.* — Deux droites qui ne forment pas d'angle (c'est-à-dire qui ne se rencontrent pas), ont même direction.

4° *Dérivée.* — Les droites qui ont même direction ne forment pas d'angle (ne se rencontrent pas).

On voit immédiatement que la proposition 4° est la dérivée de la proposition 1°, et par conséquent, prise comme définition, elle est légitime au même titre et au même degré que celle-ci.

Le postulatum d'Euclide peut se mettre à volonté sous la forme 2° — c'est celle que nous avons choisie — ou sous la forme 3°. Nulle part, que je sache, il n'est présenté de cette dernière façon, mais il l'est sous une forme équivalente : Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite (une parallèle, c'est-à-dire une droite qui ne rencontre pas l'autre).

C'est parce que pareille transformation me parait inévitable que je préfère la formule 2°. Au fond, cette formule est identique avec la proposition même d'Euclide, car les droites non parallèles sont des droites qui font avec une même sécante et du même côté de celle-ci deux angles dont la somme diffère de deux droits.

On pourra s'étonner que nous ne voyions pas dans le postulatum une conséquence du théorème sur la somme des angles du triangle. C'est pourtant là une opinion assez générale. C'était celle de Legendre. Cet ingénieux géomètre, en effet, démontre à l'aide d'un procès à l'infini que si, par supposition, on pouvait par un même point tirer deux parallèles à une même droite, il serait toujours possible de mener entre elles une droite passant par ce point et rencontrant la droite donnée.

Critiquant autrefois cette démonstration, je disais que, même en l'admettant comme irréprochable, elle ne résout pas la difficulté dans son essence. Elle établit, si l'on veut, que toute droite qui fait un angle *fini* avec la vraie parallèle rencontre la droite donnée ; mais il faudrait prouver que cette parallèle ne peut pas osciller *si peu que ce soit* autour de sa position sans rencontrer cette dernière droite d'un côté ou de l'autre [1]; ou encore —

[1] Voir *Prolégomènes*, pp 216 et suiv. A ce propos, p. 218, je dis que la démonstration de Legendre tombe « sous le coup de la critique que j'ai dirigée contre les incommensurables » ; que Legendre et son contradicteur

c'est ce que demandait M. Folie — qu'une droite tracée dans un angle et suffisamment prolongée, rencontre nécessairement au moins l'un des côtés [1].

En d'autres termes, il n'a pas été démontré qu'étant donnés trois angles dont la somme fait deux droits, on puisse toujours former un triangle qui les renferme (cf. 129bis, observation).

Je disais aussi [2] : « Le postulatum d'Euclide a une signification bien plus haute que celle qu'on lui attribue généralement.

pourraient se poursuivre éternellement s'ils divisaient indéfiniment, l'un, l'angle que fait la fausse parallèle avec la vraie, l'autre, l'angle que fait la vraie parallèle avec la sécante qu'il construit entre elles deux.

Je saisis cette occasion pour revenir sur ma note de la page 35; je m'y accuse d'ignorance : je ne croyais pas dire si juste. Quelque temps après qu'elle avait été imprimée, M. Louis Couturat, le 12 juin, présentait à la Faculté des lettres de Paris, comme thèse pour le doctorat, un mémoire des plus remarquables au point de vue philosophique et, autant que je puis en juger, des plus savants, sur l'*Infini mathématique*. Je n'ai pas encore eu le temps, cela se conçoit, de lire ce gros volume de près de 700 pages. Mais si, lors de l'impression de ma note, j'en avais lu seulement le premier livre, où il est traité précisément du même sujet, je ne l'aurais certes pas publiée. Ce n'est pas que je sois prêt à abandonner toutes les idées que j'y développe, ni à déclarer toutes les difficultés levées, mais la science de M. Couturat a ébranlé mes convictions, et en tout cas m'a démontré, clair comme le jour, que la question des incommensurables avait, depuis l'époque où elle attirait mon attention, été travaillée et fouillée profondément par des penseurs dont j'ignorais les travaux.

[1] Il a paru à Leipzig (Teubner, 1895) une histoire par Paul Haeckel de la *Théorie des parallèles depuis Euclide jusqu'à Gauss*. Rendant compte de cet ouvrage dans la *Revue des questions scientifiques* (2e série, 1895, t. VIII, pp. 603-613), M. Paul Mansion, professeur à l'Université de Gand, signala l'omission par cet auteur des travaux de Legendre, « qui, dit-il, ont contribué beaucoup plus que ceux de Wallis aux progrès de la théorie des parallèles et sont plus originaux qu'ils ne le paraissent au premier abord ». J'ai analysé ces travaux dans mes *Prolégomènes;* mais je ne sais comment il s'est fait que je n'ai pas relevé ce passage de la note II de la douzième édition, rappelé par M. Mansion, qu' « il fallait déduire de la définition de la ligne droite une propriété... qui exclût toute ressemblance avec la figure d'une hyperbole comprise entre ses asymptotes ». C'est cette propriété que postulait le lemme de M. Folie (v p. 6).

[2] Voir *Prolégomènes*, pp. 202 et suiv.

Pour devenir négative, de positive qu'elle était, une quantité qui varie d'une manière continue doit passer par zéro ou par l'infini; dans les deux hypothèses, la position intermédiaire est unique; et la seconde implique toujours le postulatum d'Euclide. Nous nous expliquons.

« Soient MN et AC (fig. 40) deux droites perpendiculaires, et convenons de regarder comme *positives* les quantités comptées sur MN à droite du point C, et comme *négatives* les quantités comptées à gauche du même point. Une droite qui tourne autour du point A de droite à gauche, coupe la droite MN en des points tels que B, de plus en plus éloignés du point C, c'est-à-dire en des points à une distance CB *positive* de plus en plus

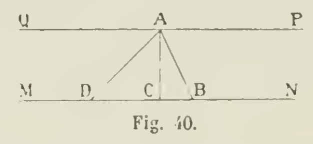


Fig. 40.

grande; cette distance devient infinie quand la droite a pris la position QP, parallèle à MN. Elle passe immédiatement au *négatif* par la continuation du mouvement qui amène la droite en AD. Quand elle a pris la position AC, l'abscisse est nulle, pour redevenir ensuite *positive*. Or, les positions AC et QP sont uniques; il est plus facile de le démontrer pour le cas de la perpendicularité (101, corol. 4)[1]; mais le cas du parallélisme est rétif. »

Si l'on reprend la formule que nous avons donnée du postulat, — deux droites non parallèles suffisamment prolongées se rencontrent, — on voit que la démonstration n'est valable que si l'on assigne le point de rencontre. C'est ce que nous allons faire, et cela très simplement.

[1] J'ajoute en note ceci : « Et pourtant encore la proposition que d'un point extérieur on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à une droite, n'est pas, jusqu'à présent, démontrée d'une manière bien simple et sans une duplication de la figure. » Il y a en effet un postulat de la perpendicularité comme un postulat du parallélisme. Mais celui-ci frappe davantage parce que, à première vue, on ne voit pas comment on passe brusquement de l'infini positif à l'infini négatif. (Voir note 1, p. 34.)

141. *Théor.* — Deux droites non parallèles, c'est-à-dire deux droites qui font avec une même sécante et du même côté de celle-ci deux angles internes dont la somme est inférieure à deux droits, font avec toute autre sécante deux angles internes dont la somme est la même et par conséquent inférieure à deux droits.

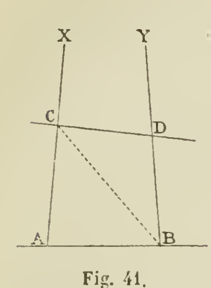


Fig. 41.

Dém. — Soient (fig. 41) AX et BY deux droites faisant avec la sécante AB et au-dessus de celle-ci deux angles XAB, YBA tels que : XAB + YBA < 2 dr. . . . (1)

Prenons sur l'une et sur l'autre de ces droites deux points C et D, et relions-les par une sécante. Je dis que l'on aura l'égalité

$$XCD + YDC = XAB + YBA \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

En effet, joignons C et B par une droite; nous aurons (132) :

$$XCB = XAB + CBA \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

D'autre part :

$$YBC = YBA - CBA \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Additionnons (3) et (4); il vient :

$$XCB + YBC = XAB + YBA \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Or, CD est par rapport à CB ce que CB est par rapport à BA ; l'on démontrerait de même que

$$XCD + YDC = XCB + YBC \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

De la comparaison de (5) et (6), on tire l'égalité (2), et de la comparaison de (1) et (2), l'inégalité

$$XCD + YDC < 2 \text{ dr.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

142. *Théor.* — Si, dans la figure formée de deux droites non parallèles, c'est-à-dire faisant avec une même sécante et du même côté de celle-ci deux angles dont la somme est inférieure à deux droits, on mène par un point de l'une une droite faisant avec elle un angle égal à l'excès de deux droits sur cette somme, cette droite sera parallèle à l'autre, et elle coupera la sécante dans sa partie interceptée.

Dém. — Soient (fig. 42), comme précédemment, deux droites AX et BY faisant avec une sécante arbitraire AB deux angles

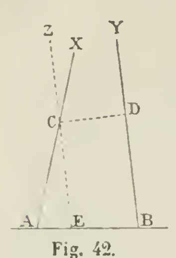


Fig. 42.

internes dont la somme est inférieure à deux droits. Prenons un point C quelconque sur la droite AX et menons par ce point la droite CZ faisant avec AX un angle ZCX = 2 droits — (XAB + YBA); je dis que cette droite CZ prendra la position indiquée dans la figure. En effet, la somme des angles XCD et YDC faits avec une autre sécante quelconque CD passant par C, est aussi inférieure à deux droits (141), et par conséquent la droite CZ tombera à gauche et son prolongement à droite de AX. De plus, elle sera parallèle à Y, car la somme des angles internes du même côté de CD sera égale à deux droits. Enfin, elle coupera la sécante AB, car elle doit sortir de la figure fermée ABDC (80) et elle n'en peut sortir en coupant la droite DB, puisqu'elle lui est parallèle; elle coupera donc AB en un point tel que E appartenant à la partie interceptée. C. Q. F. D

143. *Théor.* — Deux droites non parallèles, si on les prolonge suffisamment, finissent par se rencontrer, et elles se rencontrent du côté où la somme des angles internes qu'elles font avec une même sécante arbitraire est inférieure à deux droits.

Dém. — Soient (fig. 43) AX et BY deux droites non parallèles et faisant avec une même sécante arbitraire AB deux angles internes XAB, YBA dont la somme est inférieure à deux droits. Je dis que, suffisamment prolongées, elles se rencontreront en un point R, situé au-dessus de AB.

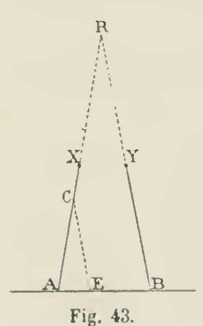


Fig. 43.

En effet, d'un point quelconque C pris sur l'une des droites, soit la droite AX, menons une parallèle CE à l'autre droite BY; cette parallèle coupera la sécante AB quelque part en un point E de la partie interceptée (142). On aura ainsi un triangle ACE. Majorons ce triangle du point A

comme centre de majoration (138); la droite CE va se mouvoir parallèlement à elle-même, le point E se déplaçant sur AB, le point C sur AX. Quand E coïncidera avec B, la droite CE coïncidera avec la droite BY, et le point C sera à la fois sur AX et sur CY, et sera devenu le point de rencontre R de ces deux droites. Ce point R est situé sur AX à une distance telle que l'on a : AR : AC = AB : AE.

Scolie. — Le triangle ABR est semblable au triangle AEC.

Cor. 1. — Deux droites qui ne se rencontrent pas, sont parallèles.

Cor. 2. — Toute droite qui en coupe une autre, coupe toutes les parallèles à cette autre.

Cor. 3. — Toute droite qui fait un angle déterminé avec une autre droite, fait le même angle avec toutes les parallèles à cette droite

Cor. 4. — Toute perpendiculaire à une droite est perpendiculaire à toutes les parallèles à cette droite, et toutes les perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Scolie. — Ces propositions, qui ont l'air d'être établies un peu laborieusement, découlent directement de la définition de la direction et des parallèles, et il suffirait de les énoncer.

144. *Théor.* — Par un point pris hors d'une droite, on peut abaisser une perpendiculaire à cette droite et l'on ne peut en abaisser qu'une.

Dém. — En effet, si d'un point O (fig. 44) on pouvait abaisser sur la droite X deux perpendiculaires OA et OB, on formerait

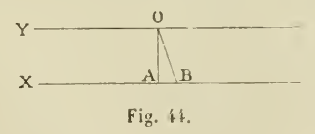


Fig. 44.

un triangle ayant deux angles droits. Ou encore, si par O on pouvait mener une parallèle Y à X, on aurait au point O, contrairement à une proposition antérieure, deux perpendiculaires à Y (101, cor. 3).

CHAPITRE IX. — La mesure des longueurs ou les distances.

Nous allons entrer dans un nouveau domaine de la géométrie, la mesure des grandeurs.

Nous nous bornerons naturellement à la mesure des longueurs, c'est-à-dire des lignes. On sait que la mesure des surfaces et des solides se ramène à celle de certaines lignes.

Toute mesure suppose une unité définie de mesure. Par cela même toute grandeur mesurée ou bien à mesurer, en d'autres termes tout quantum, est censée composée d'unités ou de fractions d'unité; par conséquent, elle est censée isogène, c'est-à-dire indéfiniment décomposable en parties égales. Donc l'unité elle-même, qui en est une portion, est une grandeur isogène.

Dans le fait, il en est ainsi. Portions de droite ou arcs de circonférence, angles plans ou dièdres, carrés, cubes ou fuseaux sphériques sont des unités isogènes.

Mais l'unité simplement isogène ne peut servir à mesurer que le quantum où elle est prise. Par exemple, un arc de circonférence ne peut mesurer que des arcs de la circonférence à laquelle il appartient; cette espèce d'unité change de forme avec le rayon : un arc de deux degrés ne ressemble pas à un arc d'un degré pris sur une circonférence de rayon double. Seule, l'unité homogène — laquelle, comme on sait, est également isogène (44) — reste inaltérée dans sa forme, qu'on la multiplie ou qu'on la majore. Elle est donc toujours prête.

De là vient que l'unité universelle pour la mesure des longueurs est une portion de ligne droite; celle des surfaces, une portion de plan; de même que, forcément, l'unité de volume est une portion d'espace.

De là vient aussi que mesurer une courbe au moyen d'une portion de droite, c'est la *rectifier*, et que mesurer une surface courbe au moyen d'une portion de plan, c'est la *planifier* [1].

[1] Voir comment nous exposons cette question dans les *Prolégomènes* (pp. 262 et suiv.)

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu à invoquer la propriété de la ligne droite de mesurer *la plus courte distance* entre les points qui la terminent (cf. 70).

A aller au fond des choses, ce n'est pas la notion de droite, mais celle de distance qui fera les frais des théorèmes qui vont suivre. Or, pour tout le monde, la distance entre deux lieux est le plus court chemin qui mène de l'un à l'autre. Ainsi chacun ratifiera sans hésitation une assertion comme celle-ci, que depuis le percement du Gothard la distance entre Lucerne et Milan est raccourcie. Sur notre globe, les distances les plus courtes, même les distances que l'on dit *à vol d'oiseau,* sont fatalement des arcs de grand cercle.

La nature d'ailleurs ne connait pas de ligne droite. Ni l'aérolithe, ni la foudre, ni le son, ni la lumière, n'en décrivent. Ils suivent cependant le plus court chemin ; mais ce chemin est la ligne de moindre résistance, ce n'est pas la ligne droite. Celle-ci n'a qu'une existence idéale dans et par la conception de l'espace géométrique, de l'espace homogène ; c'est en lui seul qu'elle mesure les distances [1].

Aussi, quand on parle géométrie, les notions de droite et de distance tendent à se confondre et à se fondre ; et la droite nous apparait comme seule propre à nous donner la mesure de la distance absolue des points de l'espace.

De là vient que de tout temps on a été porté à la définir comme la ligne minimum, ou sinon, à lui accorder ce caractère soit par un axiome ou un postulat, soit par un théorème.

J'ai critiqué ailleurs [2] et la définition et l'axiome ou postulat. Pour moi, la proposition que la ligne droite est le plus court chemin a toujours été bel et bien un théorème à démontrer. Mais il s'en faut que les démonstrations que nous en avons soient satisfaisantes.

[1] Ceux qui prendront la peine de lire mes *Prolégomènes* (pp. 225 et suiv.) verront que j'ai changé quelque peu d'avis, et que je suis moins disposé aujourd'hui à combattre Leibnitz qu'à adopter sa manière de voir.

[2] *Prolégomènes,* pp. 182 et suiv.

N'en prenons qu'une, celle qu'on trouve dans Rouché-Combe-rousse et imitée d'Euclide (I, 18-21), et voyons par quelle longue série de déductions passent ces auteurs pour arriver à établir, non pas que la ligne droite est la plus courte *de toutes les lignes dans l'espace,* mais uniquement qu'elle *est plus courte que toute ligne brisée plane ayant les mêmes extrémités* — proposition bien trop restreinte et qu'ils ne songent pas à étendre par la suite.

Je reproduis la démonstration à partir de la proposition 34.

« *Théor.* 34. — Si un triangle a deux côtés inégaux, l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés est plus grand que l'angle opposé à l'autre.

» Soit (fig. 45) le triangle ABC, dans lequel on a AC > AB ; il faut démontrer que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

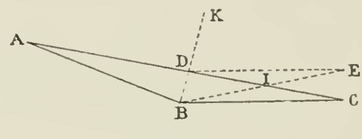


Fig. 45.

Prenons AD = AB, et menons la droite BDK ; le triangle ABD étant isocèle, l'angle ABD est égal à l'angle ADB ou à son opposé par le sommet KDC ; l'angle KDC est donc moindre que ABC.

» Joignons le point B au milieu I de DC, prolongeons BI d'une longueur IE égale à BI et tirons la droite DE ; les triangles DIE, BIC ont un angle égal DIE = BIC compris entre deux côtés égaux DI = IC ; EI = IB ; ils sont donc égaux et l'angle EDI est égal à l'angle ICB ; mais d'après la construction, le point E est situé dans l'angle KDC ; donc l'angle KDC est plus grand que EDI ou que son égal ACB.

» Donc enfin, l'angle KDC étant supérieur à ACB et inférieur à ABC, il faut que l'angle ACB soit moindre que l'angle ABC. »

Voilà sans doute — et au début de la géométrie — une démonstration bien laborieuse et bien artificielle. Elle nous fait admirer la sagacité ingénieuse du géomètre, mais elle ne se grave pas facilement dans la mémoire. Elle exige trois lignes droites auxiliaires ; elle s'appuie sur une propriété du triangle

isocèle démontrée tellement quellement (voir 127, observation), et sur un cas d'égalité des triangles; elle introduit enfin d'une manière détournée une parallèle DE, qui, tracée franchement si on l'avait pu, raccourcissait le raisonnement de plus de moitié.

Il n'y a pas une des propositions intermédiaires, par exemple que le point E est situé dans l'angle KDC, qui, au premier abord, n'apparaisse comme plus douteuse que celle à laquelle on veut aboutir, à savoir que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre; car à quel signe reconnaît-on qu'un point est situé dans un angle?

Et pourtant ce n'est pas tout. Il faut encore passer par la réciproque (prop. 35); puis par le théorème 36 et son corollaire 37, que « dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence », proposition en elle-même moins évidente encore que celle que l'on a en vue, à savoir que la ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée ayant les mêmes extrémités. En effet la plus simple des lignes brisées est formée par les deux côtés d'un triangle. N'est-ce pas le cas de rappeler ce principe que toute démonstration compliquée d'une proposition simple est mauvaise? Certes, il faut parfois s'y résigner, mais toujours avec l'arrière-pensée de la remplacer, quand on le pourra, par une plus simple.

Conclusion : l'ordre rationnel des propositions est : 1° la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre; 2° un côté d'un triangle est plus court que la somme des deux autres; 3° en corollaire, la ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée quelconque ayant les mêmes extrémités; 4° dans un triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.

C'est précisément ce que nous allons faire. Une remarque encore. La proposition 1° a besoin d'être complétée par le scolie, — pour nous servir du langage d'autrefois, — que toute ligne courbe peut être considérée comme une ligne brisée à côtés infiniment petits. Nous nous bornons à le rappeler. Ce scolie peut venir après le 3°, ou même plus tard encore. Il suffit alors de le mettre en rapport avec la proposition 1°.

Lemme. — Entre deux points d'un plan, on peut tracer plusieurs chemins de différentes longueurs.

Soit une droite AB (fig. 46) entre deux points A et B d'un plan ; on peut sur cette droite construire un triangle équilatéral ABC, en inclinant sur AB, aux points A et B, en sens contraires, deux angles de $\frac{2}{3}$ de droit. Le chemin ACB a deux fois la longueur du chemin AB.

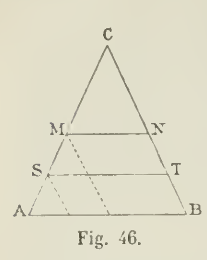


Fig. 46.

On peut allonger ce chemin par le même procédé en construisant sur AC un nouveau triangle équilatéral, et ainsi de suite.

On peut aussi le raccourcir. Soient M et N les deux points milieux de AC et de BC ; le triangle MNC est équilatéral, et par conséquent, le chemin AMNB est plus court que ACB et plus long que AB, de tout le chemin MC = $\frac{1}{2}$ AC.

De même, si S et T sont les milieux de AM et de BN, le chemin ASTB est plus court que le chemin AMNB, et plus long que le chemin AB du chemin AS = $\frac{1}{2}$ AM = $\frac{1}{4}$ AC, et ainsi de suite.

La question se présente donc de savoir si entre deux points d'un plan il y a un plus court chemin et comment il est.

145. *Théor.* — De toutes les lignes qui peuvent relier deux points d'un plan, la ligne de moindre longueur (autrement la plus courte) est la portion de droite tracée entre ces deux points.

Dém. — Soit (fig. 47) la ligne AMNB la plus courte entre

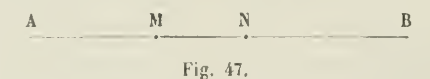


Fig. 47.

A et B. Une portion quelconque MN de cette ligne est nécessairement aussi la plus courte des lignes menées entre M et N. Or, vu que le plan [1] est une surface homogène, la portion MN ne peut différer de AB qu'en longueur, elle lui est donc semblable. Cette portion ayant été choisie quelconque, la ligne AB est donc indéfiniment décomposable en portions semblables; c'est donc

[1] On pourrait dire l'*espace;* le théorème est donc valable pour l'espace.

une ligne homogène, c'est une droite; et comme entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite, la plus courte ligne est unique.

Cor. — La ligne droite est telle que toute portion d'elle, quelle qu'elle soit, est la plus courte des lignes qu'on peut tirer entre les points qui limitent cette portion.

Scolie. — Si l'on se reporte à la définition de la distance entre deux points (70), on voit que cette distance est exprimée par la portion de droite qui les relie et par conséquent *mesurée* par la plus courte des lignes qui peuvent les relier. De là la définition vulgaire, juste mais très imparfaite, de la ligne droite : *le plus court chemin d'un point à un autre.*

146. *Théor.* — Dans tout triangle, un côté quelconque est moins grand que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

Dém. — En vertu du théorème précédent, le triangle ABC (fig. 48) nous donne : AB < AC + CB. Il donne de même l'inégalité : CB < AC + AB. Retranchons AC de part et d'autre de cette inégalité, il vient : AB > CB — AC. C. Q. F. D.

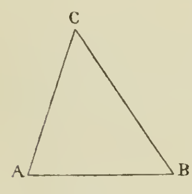


Fig. 48.

Cor. 1. — Par conséquent, pour qu'on puisse construire un triangle avec trois côtés donnés (130bis), il faut que chacun d'eux soit moins grand que la somme des deux autres et plus grand que leur différence (cf. 131, cor. 2).

Cor. 2. — Un côté quelconque d'un polygone (fermé) est moins grand que la somme de tous les autres.

Cor. 3. — On peut coucher sur une même ligne droite bout à bout tous les côtés d'un polygone, et obtenir ainsi la longueur de son contour ou de ce qu'on nomme son *périmètre.* La ligne droite peut servir ainsi à mesurer toutes les lignes polygonales, et à les comparer entre elles.

147. *Théor.* — Si d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des droites aux extrémités d'un même côté,

la somme de ces droites est moindre que la somme des deux autres côtés.

Dém. — Soit un triangle ABC (fig. 49) et O un point pris dans son intérieur; joignons AO et OB; je dis que l'on a AO + OB < AC + CB. Prolongeons par exemple AO jusqu'à sa rencontre en D avec le côté CB. En vertu du théorème précédent, nous aurons les deux inégalités : AO + OD < AC + CD, OB < OD + DB.

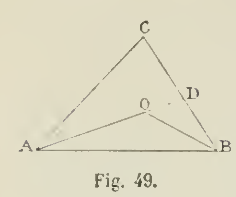


Fig. 49.

Ajoutons membre à membre :

$$AO + OD + OB < AC + CD + OD + DB.$$

Retranchons OD de part et d'autre, et observons que CD + DB = CB, il vient définitivement :

$$AO + OB < AC + CB. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire sur les polygones convexes enveloppants et enveloppés [1].

148. *Théor.* — Dans un triangle, à un angle plus grand est opposé un plus grand côté, et réciproquement, à un angle moins grand un moins grand côté.

Dém. — Soit le triangle ABC (fig. 50) où par supposition l'angle B est plus grand que l'angle A. Je dis que le côté AC sera plus grand que le côté CB. Menons BD de manière à faire l'angle DBA = l'angle A. Le triangle ADB sera isocèle et nous aurons AD = DB. Or, dans le triangle DBC, on a : CB < CD + DB ; par conséquent : CB < CD + DA, et enfin : CB < AC. C. Q. F. D. [2].

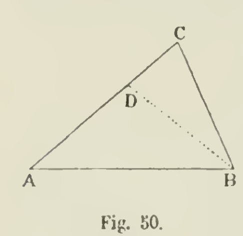


Fig. 50.

[1] Je crois pouvoir à partir d'ici abréger les démonstrations qu'on trouve partout.

[2] DB est bien une ligne auxiliaire; mais elle s'impose pour mettre en évidence la supposition que l'angle B est plus grand que l'angle A.

149. *Théor.* — Inversement, dans tout triangle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Dém. par l'absurde. — Car si au plus grand côté était opposé un angle A égal à B ou moins grand que B, on aurait B = ou < A ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

150. *Théor.* — De toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une droite, la plus courte est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.

Dém. — Soit X une droite (fig. 51), O un point d'où l'on a abaissé OA perpendiculaire et OB oblique à la droite; OA est moins grand que OB, en tant qu'opposé à l'angle OBA, moins grand que l'angle OAX, qui est droit (131, cor. 2).

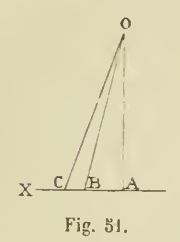


Fig. 51.

Scolie et *déf.* — La longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est prise pour mesure de la *distance de ce point* à la droite.

151. *Théor.* — De deux obliques menées d'un même point à une droite, la plus courte est celle dont le pied est le plus rapproché de la perpendiculaire.

Dém. — L'angle OBC obtus (même fig.) est plus grand que l'angle OCB aigu, et par conséquent, dans le triangle OBC, le côté OB est moins grand que le côté OC.

152. *Théor.* — Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales.

Dém. — Soient (fig. 52) deux parallèles X et Y; et soient MN et PQ deux portions de parallèles comprises entre elles; je dis que ces deux portions sont égales. En effet, tirons MQ; les deux triangles ainsi formés MNQ et MPQ sont égaux comme ayant un côté égal MQ adjacent à des angles égaux chacun à chacun, à savoir PMQ = MQN et MQP = NMQ, qui sont alternes internes ; donc MN = PQ.

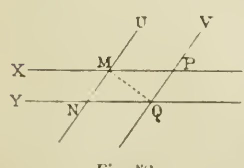


Fig. 52.

De même MP = NQ, comme portions de parallèles comprises entre les parallèles U et V. C. Q. F. D.

Cor. 1. — Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque d'une parallèle sur l'autre parallèle sont égales — puisque ces perpendiculaires sont parallèles (143, cor. 3).

Cor. 2. — Deux parallèles sont partout équidistantes.

153. *Déf.* — On nomme *distance de deux parallèles* la portion de perpendiculaire commune interceptée entre elles.

154. *Théor.* — Une ligne équidistante d'une droite est une droite parallèle à celle-ci.

Dém. — Soit X (fig. 53) une droite et NQR une ligne équidistante de cette droite. Je dis que cette ligne est une droite qui lui est parallèle. En effet, soit MN la distance, et par le point N

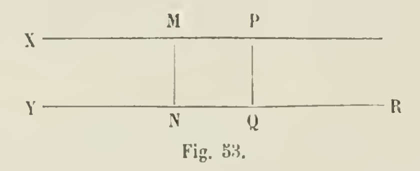


Fig. 53.

menons la droite Y parallèle à X. Un point quelconque Q de cette droite sera à la même distance de X, c'est-à-dire qu'on aura QP = NM, et par conséquent il appartiendra aussi à la ligne équidistante ; celle-ci est donc une droite. C. Q. F. D.

155. *Théor.* — Si dans un triangle isocèle, on tire une droite du sommet au milieu de la base, cette droite divise le triangle en deux triangles symétriques, divise l'angle du sommet en deux angles égaux et est perpendiculaire à la base.

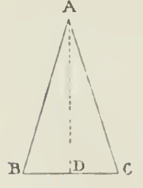
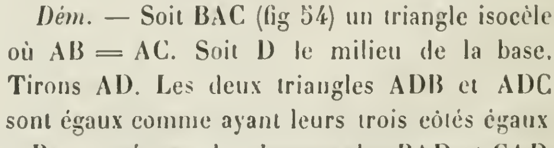


Fig. 54.



Dém. — Soit BAC (fig 54) un triangle isocèle où AB = AC. Soit D le milieu de la base. Tirons AD. Les deux triangles ADB et ADC sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Par conséquent les deux angles BAD et CAD

sont égaux comme opposés aux côtés égaux BD et DC. Il en est de même des angles adjacents en D ; ceux-ci sont donc droits.

C. Q. F. D.

156. *Théor.* — Inversement, la perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle isocèle sur la base la divise en deux parties égales.

Dém. par l'absurde. — Sinon, en joignant le sommet au milieu de la base, on aurait d'un même point A deux perpendiculaires abaissées sur BC.

Cor. 1. — Si d'un même point d'une perpendiculaire à une droite, on mène de part et d'autre deux obliques faisant le même angle avec celle-ci, ces deux obliques sont égales.

Cor. 2. — Si de deux points également éloignés de part et d'autre du pied d'une perpendiculaire, on mène des droites à un point de celle-ci, elles délimitent un triangle isocèle et sont égales.

Cor. 3. — Dans un triangle isocèle, un des côtés égaux est plus grand que la moitié de la base, puisque l'on a $BC < AB + AC$, d'où $2BD < 2AB$; d'où $BD < AB$.

Scolie. — De ce corollaire on peut tirer en corollaire une proposition déjà vue, que toute perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est plus courte que toute oblique partant du même point.

157. *Déf.* — On nomme *triangle rectangle* un triangle dont un des angles est droit.

Le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypoténuse.*

Scolie. — Un triangle rectangle peut être isocèle, mais il ne peut être équilatéral.

158. *Cor.* 1. — Deux triangles rectangles sont égaux, quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, car alors ils ont aussi le troisième angle égal.

Cor. 2. — Deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont un angle aigu égal.

159. *Cor.* 3. — Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont un côté de l'angle droit égal et un angle aigu égal, car alors ce côté est compris entre angles égaux chacun à chacun.

160. *Théor.* — Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal.

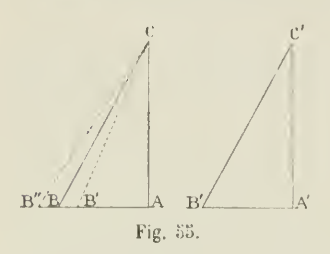


Fig. 55.

Dém. — Soient (fig. 55) deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ où l'on a les côtés AC = A′C′, et les hypoténuses BC = B′C′.

Plaçons A′C′ sur AC; les angles en A étant égaux comme droits, A′B′ prendra la direction AB. Quant à l'hypoténuse C′B′, elle prendra la direction CB; car si elle tombait en CB′ ou CB″, elle serait plus courte ou plus longue que CB (151), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Scolie. — Tout triangle non rectangle peut se décomposer de trois façons en deux triangles rectangles.

Conclusion et résumé.

Je termine ici la tâche que j'ai entreprise. Je la résume en quelques mots.

Dans les trois études publiées par la *Revue philosophique* (1893 et 1894), j'ai cherché d'abord à établir que l'espace géométrique ne pouvait avoir d'existence réelle; que l'homogénéité qui le caractérise, c'est-à-dire la propriété de recevoir des figures semblables, était incompatible avec la réalité; que sinon, l'univers ni aucune de ses parties n'auraient de grandeur absolue; il ne comporterait que des rapports de longueurs et des angles, et ces rapports, ces angles devraient seuls rendre compte de tous les phénomènes, phénomènes physiques, chimiques, biologiques, intellectuels. Que seraient la science, la vérité, l'erreur, le devoir, la vertu, le vice dans une pareille conception? La résultante d'un concours de cubes et de tétraèdres.

J'ai fait voir ensuite que les géomètres qui ont voulu dépouiller l'espace géométrique de son caractère homogène, en lui substituant l'isogénéité, n'ont pas renversé la géométrie euclidienne, mais en ont tiré des conséquences généralisées ensuite au moyen d'un artifice de langage. Dans les espaces méteuclidiens, la forme des figures dépend de leurs dimensions, et les nouveaux géomètres n'ont fait qu'étendre aux espaces qu'ils ont conçus, les propriétés de certaines surfaces euclidiennes, la sphère et la pseudosphère. De cette façon, leurs géométries ne sont ni plus vraies ni plus fausses que la géométrie traditionnelle; elles trouvent dans cette dernière leur garantie, et au fond, c'est elle qui leur sert de fondement.

Enfin, j'ai montré comment avait pu germer dans la tête des géomètres la conception de géométries autres que celle d'Euclide. C'est que celle-ci s'appuie sur des postulats, postulats de la droite, du plan, des parallèles, ce dernier célèbre surtout par la stérilité des efforts faits pendant plus de deux mille ans pour le démontrer. Ils ont alors imaginé de se passer de ce postulat, et de créer des espaces où il n'y a pas de parallèles, et, par la même occasion, où il n'y a pas de plans, pas de droites. Ils conservent bien les noms de ces choses, mais en les détournant du sens qu'on leur donne d'habitude. Ils ont pensé que par là ils fondaient une science exempte de reproche, et qu'en même temps ils dissuadaient à tout jamais les chercheurs de poursuivre la solution des postulats. En quoi ils se sont trompés. Certes, dans leurs géométries, il n'est plus question du postulatum d'Euclide sur les parallèles, puisqu'elles écartent les vraies parallèles auxquelles il s'applique ; seulement, quant aux postulats de la droite et du plan, moins célèbres sans doute, mais tout aussi importants, elles les adoptent clandestinement — sous d'autres habits — voilà tout.

Ces études appelaient un complément naturel et nécessaire. Les métagéomètres ont avancé qu'il y avait trois géométries possibles : les géométries aparallèle, polyparallèle, monoparallèle ou encore les géométries où les trois angles d'un triangle font plus que deux droits, moins que deux droits, exactement deux

droits ; ils les mettent toutes trois sur le même pied, vu que, disent-ils, elles postulent chacune des propositions du même ordre et équivalentes ; le postulatum d'Euclide n'a donc en soi rien de plus rationnel, de plus évident, de plus *a priori* que les postulats contraires. Cette assertion ne pouvait être réfutée victorieusement que d'une seule manière. Il fallait faire voir que le postulat d'Euclide était démontrable, et mieux encore, qu'il était une de ces propositions qui, en soi, n'a pas un caractère spécial, la différenciant des théorèmes du même ordre.

C'est ce qui a été fait. Le présent travail a eu pour but et pour résultat de réédifier sur une base rationnelle — ou, si l'on aime mieux, plus rationnelle — la géométrie d'Euclide. Cette base rationnelle, c'est la proposition fondamentale qui *postule* le caractère *hypothétique* de l'espace géométrique, l'homogénéité ; c'est l'affirmation que, dans cet espace, *la forme des figures est indépendante de leur grandeur*. L'espace ainsi défini, privé d'une dimension, devient le plan ; privé de deux, la droite. La plus simple des figures que comporte la droite est la portion de droite et, par conséquent, toutes les portions de droites sont semblables — première proposition sur la similitude. Le plan admet des figures planes et, par conséquent, des figures rectilignes semblables, d'où il est facile de passer ensuite aux figures curvilignes. En dernier lieu, de même que la géométrie de la droite conduit à la géométrie du plan, de même celle-ci conduit à la géométrie spatiale.

La géométrie euclidienne ainsi affermie, les géométries méteuclidiennes ne sont pas ébranlées, au contraire. Il n'y a que certaines de leurs prétentions qui sont rabattues.

TABLE DES MATIÈRES.